ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI

PUBBLICATI

CONFORME ALLA DECISIONE ACCADEMICA

del 22 *dicembre* 1850

E COMPILATI DAL SEGRETARIO

TOMO XXXIX - ANNO XXXIX

(1885-1886)

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata N.° 3.
1886

ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI
ANNO XXXIX.

ELENCO DEI SOCI

Data della elezione	Soci Ordinari
2 Febbraio 1862.	Azzarelli Prof. Cav. Mattia.
3 Luglio 1847.	Boncompagni Principe D. Baldassarre.
2 Giugno 1867.	Castracane degli Antelminelli, Ab. Conte Francesco.
5 Maggio 1878.	Ciampi P. Felice.
20 Febbraio 1876.	Colapietro Prof. Dott. Domenico.
7 Maggio 1871.	De Rossi Prof. Cav. Michele Stefano.
20 Febbraio 1876.	De Rossi Re Prof. Vincenzo.
18 Giugno 1876.	Descemet Comm. Carlo.
27 Aprile 1873.	Ferrari P. G. Stanislao.
18 Giugno 1876.	Foglini P. Giacomo.
3 Giugno 1866.	Guglielmotti P. Alberto.
20 Febbraio 1876.	Guidi Cav. Filippo.
5 Maggio 1878.	Ladelci Prof. Dott. Francesco.
24 Gennaio 1875.	Lais P. Giuseppe.
5 Maggio 1878.	Lanzi Dott. Matteo.
27 Aprile 1873.	Olivieri Cav. Giuseppe.
7 Maggio 1871.	Provenzali P. Francesco Saverio.
7 Maggio 1871.	Regnani Monsignor Prof. Francesco.
16 Marzo 1879.	Sabatucci Cav. Placido.
15 Gennaio 1882.	Solivetti Dott. Alessandro.
18 Giugno 1876.	Statuti Cav. Prof. Augusto.
20 Febbraio 1876.	Tancioni Prof. Cav. Gaetano.
28 Gennaio 1883.	Tuccimei Prof. Giuseppe.
	Soci Onorari
5 Maggio 1878.	Sua Santità Leone papa XIII.
28 Marzo 1883.	S. E. Rma il Card. Gaetano Alimonda, Arcivescovo di Torino.
17 Febbraio 1879.	S. E. Rma Haynald Card. Ludovico, Arcivescovo di Colocza.
16 Marzo 1879.	Boncompagni D. Ugo Marchese di Vignola.
5 Maggio 1878.	Ciccolini Monsignore Stefano.
25 Maggio 1848.	Cugnoni Ing. Ignazio.
5 Maggio 1878.	De Rossi Comm. Giovanni Battista.
25 Maggio 1878.	Palomba Cav. Clemente.
16 Dicembre 1883.	Sterbini Comm. Giulio.
5 Maggio 1878.	Vannutelli Monsignore Vincenzo.

Data della elezione	Soci Aggiunti
16 Giugno 1878.	Boncompagni Ludovisi D. Luigi.
5 Maggio 1878.	Bonetti Prof. D. Filippo.
12 Giugno 1881.	Buti Monsignore Prof. Giuseppe.
26 Maggio 1878.	De Courten Ing. Giuseppe Erasmo.
26 Maggio 1878.	Del Drago dei principi, D. Ferdinando.
23 Maggio 1880.	Fonti Marchese Luigi.
26 Maggio 1878.	Giovenale Ing. Giovanni.
5 Maggio 1878.	Gismondi Prof. D. Cesare.
26 Maggio 1878.	Paloni Prof. D. Venanzio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Eugenio.
5 Maggio 1878.	Persiani Prof. Odoardo.
12 Giugno 1881.	Santovetti Prof. D. Francesco.
5 Maggio 1878.	Seganti Prof. Alessandro.
26 Maggio 1878.	Zama Prof. Edoardo.
	Soci Corrispondenti italiani
27 Aprile 1873.	Bertelli P. Timoteo, Professore al Collegio alla Querce, Firenze.
11 Maggio 1851.	Betti Comm. Enrico, Professore nella R. Università di Pisa.
12 Giugno 1881.	Bruno Prof. D. Carlo, Mondovì.
23 Aprile 1876.	Cecchi P. Filippo, Direttore dell'Osservatorio Ximeniano, Firenze.
22 Febbraio 1885.	Cerebotani Prof. Luigi, Verona.
23 Maggio 1880.	De Andreis Ingegnere Angelo, Roma.
2 Maggio 1858.	De Gasperis Comm. Annibale, Professore nella R. Università, Napoli.
27 Aprile 1873.	Denza P. Francesco, Direttore dell'Osservatorio di Moncalieri.
18 Giugno 1876.	De Simoni Cav. Avv. Cornelio, Segretario degli Archivi di Stato, Genova.
23 Maggio 1880.	Donati Biagio, Civitavecchia.
12 Giugno 1881.	Egidi P. Giovanni, Roma.
23 Aprile 1876.	Galli Prof. D. Ignazio, Direttore dell'Osservatorio meteorico municipale, Velletri.
23 Aprile 1876.	Garibaldi Prof. Pietro Maria, Direttore dell'Osservatorio meteorologico, Genova.
19 Aprile 1885.	Genocchi Prof. Angelo, Torino.
19 Aprile 1885.	Grassi Landi Monsignore Bartolomeo, Roma.
28 Gennaio 1883.	Mazzetti Ab. Giuseppe, Modena.
12 Giugno 1881.	Medichini prof. D. Simone, Viterbo.
1 Aprile 1860.	Meneghini Comm. Prof. Giuseppe, Pisa.
19 Aprile 1885.	Mercalli Prof. Sac. Giuseppe, Monza.

Data della elezione	Soci Corrispondenti italiani
22 Febbraio 1885.	Luvini Prof. Giovanni, Torino.
15 Gennaio 1832.	Ragona prof. Domenico, Modena.
19 Aprile. 1885.	Rossi Prof. Stefano, Domodossola.
4 Maggio 1849.	Scacchi Prof. Arcangelo, Napoli.
28 Gennaio 1883.	Seghetti Dott. Domenico, Frascati.
23 Aprile 1876.	Seguenza Prof. Cav. Giuseppe, Messina.
23 Aprile 1877.	Stoppani Prof. D. Antonio, Dirett. del Museo Civico, Milano.
4 Febbraio 1849.	Tardy Comm. Placido, Professore nella R. Università, Genova.
13 Gennaio 1867.	Turazza Cav. Domenico, Professore nella R. Università, Padova.
16 Dicembre 1883.	Venturoli Cav. Dott. Marcellino, Bologna.
1 Aprile 1860.	Villa Antonio, Milano.
	Soci Corrispondenti stranieri
17 Novembre 1850.	Airy G. B. Greenwich.
21 Decembre 1873.	Bertin Emilio, ingegnere delle costruzioni navali, Brest.
8 Aprile 1866.	Bertrand Giuseppe Luigi, Membro dell' Istituto di Francia, Parigi.
17 Marzo 1878.	Breithof Nicola, Professore all' Università di Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giuseppe, Lovanio.
23 Maggio 1880.	Carnoy prof. Giovanni Battista, Lovanio.
12 Giugno 1881.	Catalan prof. Eugenio, Liége.
12 Giugno 1881.	Certes prof. Adriano, Parigi.
20 Aprile 1884.	D'Abbadie Antonio, Parigi.
4 Marzo 1866.	Dausse Battista, Ingegnere idraulico, Parigi.
16 Febbraio 1879.	De Basterot Conte S.
11 Giugno 1865.	De Caligny marchese Anatolio, Versaille.
10 Giugno 1860.	De Candolle Alfonso, Ginevra.
16 Dicembre 1883.	De Jonquières, Ammiraglio, Parigi.
16 Febbraio 1879.	Di Brazzà Savorgnan Conte Pietro.
10 Luglio 1853.	Du Bois Reymond E., Berlino.
8 Aprile 1866.	Fizeau Armando Ippolito, Membro dell' Acc. delle scienze dell'Istituto di Francia, Parigi.
22 Febbraio 1874.	Gilbert Filippo, Professore nell' Università cattolica di Lovanio.
17 Novembre 1855.	Henry, Segretario dell'Istituto Smitsoniano di Washington.
6 Luglio 1873.	Hermite Carlo, Membro dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Francia.

Data della elezione	Soci Corrispondenti stranieri
18 Giugno 1876.	Joubert P. Carlo.
4 Marzo 1866.	Le Joli Augusto, Cherbourg.
12 Giugno 1881.	Le Paige Prof. Costantino, Liége.
10 Luglio 1853.	Liais E. Astronomo in Parigi.
10 Luglio 1853.	Malmsten Dott. C. G. professore di matematica nell'Università di Upsal.
20 Aprile 1884.	Meignan Monsignor Guglielmo, Arcivescovo di Tours.
10 Luglio 1853.	Neumann Dott. Professore nell'Università di Könisberg.
18 Giugno 1876.	Pepin P. Teofilo.
28 Gennaio 1883.	Perry P. Stefano Giuseppe, Direttore dell'Osservatorio di Stonyhurst.
20 Aprile 1884.	Renard, R. P. Bruxelles.
10 Luglio 1853.	Roberts G. professore al collegio Monayhan, Dublino.
20 Aprile 1884.	Roig y Torres Prof. Raffaele, Barcellona.
2 Maggio 1858.	Sabine Edoardo, Londra.
20 Gennaio 1884.	Schimd D. Julius, Professore nell'Università di Tubbinga.
10 Giugno 1860.	Soret Luigi, Ginevra.
2 Maggio 1858.	Thomson Guglielmo, Professore nell' Università di Glasgow.
2 Maggio 1858.	Wehlberg Pietro Federico, Stockolm.

Presidente

Conte Ab. Francesco Castracane degli Antelminelli.

Segretario

Cav. Prof. Michele Stefano De Rossi

Vice Segretario

P. Giuseppe Lais.

Comitato Accademico

Conte Ab. F. Castracane. Prof. M. S. de Rossi.
Prof. M. Azzarelli. P. F. S. Provenzali.
P. G. S. Ferrari.

Commissione di censura

Principe D. B. Boncompagni. Prof. A. Statuti.
P. G. S. Ferrari. P. F. S. Provenzali.

Tesoriere

P. G. S. Ferrari.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE Iª DEL 30 DICEMBRE 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULL'IPOTESI DI AMPÈRE
INTORNO ALLA NATURA DEL MAGNETISMO
NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

L'ipotesi proposta da Ampère intorno alla natura del magnetismo, sebben generalmente ammessa dai Fisici, pure è stata oggetto di ripetuti attacchi anche per parte di alcuni scienziati moderni di grande merito e di altrettanto grande riputazione. Trattandosi di una ipotesi che riduce ad un solo principio i fenomeni tutti della elettricità e del magnetismo e che è stato il punto di partenza per giungere alla scoperta di un gran numero di fatti non meno interessanti per la scienza che per la pratica, credo cosa utile il dimostrare che questi attacchi, se potevano sembrare abbastanza fondati in altri tempi, al presente debbono dirsi affatto privi di fondamento.

Ampère per una di quelle intuizioni con cui talvolta si giunge a scoprire la verità anche quando non se ne hanno ragioni valevoli a dimostrarla, avendo osservato che le correnti elettriche e le calamite agivano mutuamente come se anche queste fossero animate da correnti elettriche, suppose

che tali correnti esistessero veramente nelle calamite e che la natura del magnetismo consistesse in una serie di correnti elettriche, tutte fra loro parallele e formanti ciascuna un circuito chiuso. Quanto all'origine da assegnarsi a queste correnti, Ampère saviamente credette non essere ancora venuto il tempo di occuparsene; che troppo scarse erano allora le cognizioni che si avevano intorno alla fisica molecolare. Certo che stando ai fatti a quel tempo conosciuti era cosa molto difficile il concepire come si possano avere delle correnti continue senza una continua trasformazione di movimenti o chimici o termici o meccanici. Non è più così al presente dopo che i fenomeni del calorico ci hanno fatto conoscere che le molecole dei corpi sono in continuo moto e che questo moto si comunica alla materia imponderabile, epperò anche all'elettrico, il quale si trova in tutti i corpi e probabilmente non è altro se non quel fluido sottilissimo chiamato *etere*, che i fenomeni della luce ci mostrano per tutto eziandio passo nel l'interno dei corpi opachi. Non ostante dunque l'assoluta mancanza di ogni causa esteriore capace di rompere l'equilibrio molecolare, può nei corpi esistere l'elettrico a stato dinamico permanente pel solo fatto che le loro molecole sono in continuo movimento. E se questo movimento non sia di semplice traslazione; ma come è più verisimile, di traslazione insieme e di rotazione (1), nelle particelle infinitesime dei corpi avverrà quello che vediamo avvenire nei moti rotatori delle masse finite immerse nei fluidi, cioè attorno a ciascuna molecola si formerà un vortice o correntella elettrica per modo che se una causa estrinseca p. e. una corrente voltiana determinerà quelle correntelle a disporsi le une parallelamente alle altre, ne risulterà una calamita nella maniera immaginata da Ampère. Nè si creda che il moto rotatorio delle particelle dei corpi sia una ipotesi oppurtanamente inventata solo per far vedere la possibilità delle correnti amperiane. Lo sviluppo che in questi ultimi tempi ha preso lo studio della meccanica molecolare c'induce

---

(1) Senza neppure supporre che le particelle de' corpi sieno state originariamente dotate del moto di traslazione insieme e di rotazione, avuto riguardo agli urti scambievoli e per lo più eccentrici che avvengono fra le particelle medesime, si vede che ambedue le specie di movimento debbono generalmente in esse aver luogo.

(2) Un indizio assai manifesto della parte che ha lo squilibrio dell' etere nelle unioni molecolari l' abbiamo dal fatto che se rompiamo un corpo, per ripristinarne la coesione non basta riaccostarne semplicemente le parti fino a perfetto combaciamento, come pure dovrebbe bastare se la coesione consistesse in una forza attrattiva propria delle molecole. Che se detta azione è invece dovuta allo squilibrio di pressione dell' etere circostante è manifesto che a ristabilire la coesione, oltre la distanza insensibile fra le molecole, sarà pure necessario che la circolazione dell' etere riprenda il suo andamento normale sturbato per la rottura; cosa che in generale non si può ottenere senza restituire alle molecole la loro libertà per mezzo della fusione o della soluzione. Di questo sturbarsi il corso normale dell' etere per la rottura dei corpi, ne abbiamo anche un segno nello sviluppo di elettricità e di luce, che spesso accompagnano lo spezzarsi dei corpi medesimi.

anzi a credere appena essere possibile assegnare una ragione fisica ai fenomeni che ci offrono i corpi senza ammettere quella ipotesi.

E per cominciare da quei fenomeni che appariscono prodotti da una forza operante a distanza, sia tale distanza insensibile ed infinitesima come nella coesione ed affinità chimica, o sia sensibile ed illimitata come nella gravità ed attrazione universale, se non vogliamo supporre nella materia la capacità di agire ove non è, la maniera più semplice e naturale per intendere siffatte azioni è di considerarle prodotte da uno squilibrio di pressione nel mezzo ambiente cioè nell'etere; perchè è certo che quelle apparenti attrazioni hanno luogo ugualmente bene tanto nell'aria che in uno spazio affatto privo di materia pesante (2). Se ora ci facciamo ad indagare quale possa essere la causa capace di produrre nell'etere uno squilibrio quale si richiede per unire e mantenere unite le particelle dei corpi, nulla troviamo di più verosimile che il moto rotatorio degli atomi e delle molecole. Ammesso infatti che gli atomi di tutti i corpi sieno continuamente animati da un moto di rotazione, conseguenza di questo moto sarà, come dicemmo, che attorno ad ogni atomo si formi un'atmosfera di etere rarefatto, la cui densità vada crescendo dal centro alla periferia. Quando dunque due atomi sieno giunti a tanto piccola distanza fra loro che uno si trovi nell'atmosfera eterea dell'altro, questi due atomi saranno spinti ad urtarsi dalla pressione dell'etere circostante maggiore di quella dell'etere interposto più rarefatto. E se dopo l'urto non tornino di nuovo a separarsi (come spesso deve accadere nei gas a motivo della grande velocità di traslazioni da cui sono animati) ne nascerà un nuovo centro di azione, cioè una molecola semplice o composta secondo che quegli atomi sieno della stessa o di diversa natura. Ed ecco come ammessa la rotazione atomica si dà ragione della genesi dei composti e l'affinità chimica entra nel numero delle azioni meccaniche.

Il medesimo può dirsi rispetto alla coesione ed alla attrazione universale. Quanto alla coesione, posto che gli atomi nell'atto di unirsi a formare le molecole, penetrino gli uni nelle atmosfere eteree degli altri (1),

(1) Secondo questo modo di concepire le azioni atomiche e molecolari, la differenza fra l'affinità chimica e la coesione consisterebbe in ciò che nell' esercizio dell' affinità le atmosfere eteree si fondono assieme; onde le molecole che ne risultano hanno masse, velocità ed atmosfere totalmente diverse da quelle degli atomi che le compongono. Laddove nella coesione, sia per la troppo cresciuta distanza dei centri di rarefazione, sia per la troppo diminuita velocità di rotazione, in generale non ha luogo la fusione delle atmosfere; sicchè nei gruppi molecolari che ne risultano le singole molecole conservano i loro movimenti e la loro individualirà specifica. E così s' intende come sia che nelle unioni molecolari le proprietà chimiche delle molecole rimangono inalterate, mentre nei composti quelle proprietà sono del tutto diverse da quelle dei loro componenti.

le molecole che ne risultano saranno anche esse attorniate da atmosfere eteree di densità crescente dal centro alla periferia; sicchè venute esse a piccolissima distanza potranno unirsi e rimanere unite assieme, formando dei gruppi multipli, nei quali il numero dei centri che concorrono alla rarefazione del mezzo circostante potrà crescere oltre ogni limite. Nel caso dunque delle masse molto grandi, come del Sole, della Terra, ecc., la rarefazione prodotta dallo sterminato numero di molecole che le compongono si potrà estendere a distanza illimitata e tutti i corpi che si trovano in queste immense sfere di etere rarefatto saranno spinti gli uni verso gli altri nella ragione diretta dei centri di azione ossia delle masse ed inversa duplicata delle distanze (1).

Ciò che si dice dell'attrazione molecolare ed universale deve intendersi detto anche delle attrazioni elettriche e magnetiche, anzi in queste apparisce più manifesta la necessità delle rotazioni atomiche e molecolari. Infatti ciò che appellasi *atmosfera elettrica*, meccanicamente considerata si riduce ad una *pressione permanente* che si diffonde nell'etere circostante tutto attorno al corpo elettrizzato. Onde lo squilibrio dell'etere in vicinanza dei corpi elettrizzati è ben diverso da quello che si osserva in un mezzo semplicemente elastico, in cui lo spostamento prodotto da un impulso è subito seguito dalla completa restituzione delle parti e tutto rimane in equilibrio. Bisogna dunque dire che nell'etere libero l'effetto di un impulso non si esaurisce completamente nella direzione dell'urto, ma una parte ne rimane negli atomi eterei per modo da produrre negli strati contigui una condensazione crescente colle distanza.

Tuttociò agevolmente s'intende se le atmosfere elettriche si concepiscano formate di atomi dotati di movimento rotatorio. Imperocchè iu tal caso il movimento prodotto da un impulso nella direzione longitudinale sarà tanto più piccolo quanto è più rapida la rotazione (2), ed il suo effetto sarà di

(1) Non è difficile intendere come avvenga che sebbene le azioni molecolari e la gravitazione universale si concepiscano derivate dallo stesso principio, cioè dallo squilibrio dell'etere circostante, pure solo quelle sieno diverse nei diversi corpi ed enche in un medesimo corpo nelle diverse circostanze di temperatura, stato di aggregazione ecc. Finchè l'azione non si esercita cbe a distanza insensibile, essa deve necessariamente dipendere dalle masse, velocità ed atmosfere degli atomi o delle molecole che sono fra loro vicinissime, epperò variare colla natura dei corpi e colle circostanze capaci di alterarne i movimenti. Ma quando la distanza fra due corpi sia divenuta sensibile, cessa l'azione prevalente dei singoli atomi o delle singole molecole, e sottentra quella delle loro risultanti, cioè l'uniforme rarefazione del mezzo interposto. Onde la gravità terrestre in un medesimo luogo deve essere indipendente dalla natura dei corpi ossia operare ugualmente su tutti i corpi. E siccome la rarefazione del mezzo è permanente, così l'effetto deve essere continuo, nè potrà mai assegnarsi un intervallo di tempo fra l'istante in cui un corpo entra o rimane libero nella sfera di azione della Terra e quello in cui è spinto verso il suo centro.

(2) Ammesso che l'elasticità dell'etere sia un effetto delle rotazioni atomiche, chiaramente

condensare lo strato etereo contiguo e questo il seguente e così appresso; d'onde nascerà nel mezzo una pressione decrescente colla distanza e tanto più durevole quanto è più difficile la diffusione del movimento che la produce.

Un'altra classe di fenomeni per l'intelligenza dei quali giova non poco l'ipotesi delle rotazioni atomiche e molecolari ci è offerta dall' ottica. Questo ramo di Fisica sebbene possa dirsi oramai perfetto, nel senso che partendo dalla teoria dei moti vibratori col soccorso dell' analisi matematica ci dà ragione dei fenomeni della luce anche i più complicati, pure se vogliamo intendere il modo con cui si possono concepire prodotti molti di quei fenomeni siamo costretti di ricorrere alle ipotesi. Fra queste una delle più soddisfacenti, e che da sè sola può supplire quasi a tutte le altre, è che le molecole tanto dell'etere che della materia pesante sieno dotate di moto rotatorio. Preso p. e. a considerare il fenomeno della dispersione prismatica, dai risultati del calcolo abbiamo che la condizione richiesta perchè la velocità della luce cessi di essere indipendente dalla lunghezza delle onde, di maniera che le più brevi debbano separarsi dalle meno brevi, è che il mezzo per cui si propaga la luce sia formato di molecole cinte da atmosfere di densità non uniforme (1). Ammesso il moto rotatorio delle molecole facilmente s'intende l'esistenza di siffatte atmosfere, e di più s'intende come la densità dell'etere possa essere non uniforme anche nei corpi perfettamente omogenei, e rimanere tale dopochè quei corpi dallo stato solido sieno passati allo stato liquido od aereo.

Similmente dalla teoria dei moti vibratori nei mezzi non perfettamente omogenei, risulta che la doppia rifrazione è dovuta alla diversa elasticità dell'etere nelle diverse direzioni dei cristalli non appartenenti al primo sistema cristallografico. E se si domanda donde possa nascere questa diversa elasticità, si suole rispondere che dalla disuguale distribuzione delle molecole cristalline nelle varie direzioni dei cristalli, ma con ciò non rimane spiegato come un fluido incoercibile, quale si è l' etere, possa acquistare e mantenere diversa elasticità nell' interno di un cristallo, pel solo fatto che le molecole pesanti sono in esso variamente distribuite. Che se si ac-

---

si vede che nella direzione dell' urto l'etere non può spostarsi che di una quantità piccolissima; imperocchè essendo enorme la sua elasticità, come apparisce dai fenomeni della luce, tale pure deve essere la rapidità delle sue rotazioni atomiche, e quindi grandissima la resistenza che deve opporre al moto nella direzione longitudinale.

(1) La dispersione prismatica ha lungamente resistito agli sforzi dei matematici, e solo se ne potè dare ragione dopo che Cauchy introdusse nei calcoli la imperfetta omogeneità dei mezzi rifrangenti. Ma la conclusione che questa imperfetta omogeneità consista nella non uniforme densità delle atmosfere molecolari è dovuta ai due insigni geometri Lamé e Briot.

cettino le rotazioni atomiche, subito si capisce che secondo la diversa orientazione degli assi di rotazione sarà diversa nei cristalli la densità e quindi l'elasticità dell'etere. Sicchè sapendosi dalla meccanica che nei corpi giranti gli assi tendono al parallelismo, affinchè un corpo sia birefrangente basterà che quella tendenza abbia il suo effetto in una determinata direzione.

Anche prescindendo dai fenomeni particolari l'ipotesi delle rotazioni atomiche è tanto importante che senza di essa neppure sembra possibile intendere la propagazione della luce (1). E per verità se le vibrazioni dell'etere sono perpendicolari al raggio, come ad evidenza dimostrano i fenomeni della polarizzazione, bisogna dire che nell'etere la resistenza al moto sia minore nella direzione laterale che nella longitudinale. Ma come è possibile concepire che in un fluido libero ed omogeneo la resistenza al moto sia minore in una dtrezione che in un' altra, se non si ammette che le sue molecole sieno animate da moto rotatorio? Solo in questa ipotesi la sperienza ed il calcolo ci mostrano che il centro di gravità delle molecole urtate può trasportarsi lateralmente alla direzione dell' urto, E tanto basti avere accennato allo scopo di fare intendere che l' ipotesi delle rotazioni atomiche e molecolari, oltre a mostrarci la possibilità delle correnti amperiane, ci è pure di grande aiuto per la intelligenza di molti altri fenomeni naturali.

Del resto le correnti amperiane non solo debbono dirsi possibili, ma nello stato attuale della scienza non sembra permesso negare che tali cor-

---

(1) Si può dire altrettanto della propagazione del calorico non solo per raggiamento che non ha bisogno di prova, ma anche per semplice conducibilità. Infatti la sola elasticità ordinaria non basta per intendere come avvenga che quando p. e. una barra metallica si espone con una sua estremità a contatto di una sorgente calorifica e il calore si propaga per tutta la sua lunghezza, rimossa la barra dalla sorgente l'estremità che venne da questa immediatamente scaldata non si trovi fredda, ma molto calda. Eppure è proprio dei movimenti che si propagano nei mezzi elastici ed omogenei di procedere sempre innanzi senza che ne rimanga traccia negli strati che restano a dietro. Bisogna dunque dire che nella propagazione del calorico per conducibilità, oltre il moto vibratorio delle molecole ve n'è anche un altro il quale fa che il movimento torni a dietro e si diffonda per tutta la massa, e questo pare non possa essere altro se non quello che nei moti rotatori dicesi di *conversione*. V. Secchi *L'unità delle forze fisiche* Lib. I, C. VI; dove si troveranno molti altri fatti ed argomenti che dimostrano la necessità di attribuire alle particelle de' corpi un movimento di traslazione insieme e di rotazione. Secondo questo illustre Autore non ammesso il moto rotatorio delle particelle dei corpi neppure si potrebbe intendere l'elasticità in tutta la sua ampiezza, cioè in modo da potersi pure applicare ai veri atomi o vogliam dire ai corpi ridotti all' ultimo limite di divisione, appunto quando dovrebbero essere arrivati al massimo di elasticità. « L'elasticità, Egli dice, concepita nel modo ordinario esige un cambiamento di forma nell'atto che il corpo si comprime, quindi richiede uno spazio interno libero e vuoto, ove si condensi la materia o almeno si traslochi per poi ritornare al posto di prima: ma per lo contrario è condizione dei veri atomi l'essere concepiti come impenetrabili e non mai come riunioni di altre parti, quindi non possono avere vuoti interni in cui restringersi o dilatarsi le parti. » È poi cosa certa per la teoria matematica dell'urto dei corpi rotanti, ed anche per la sperienza, che un corpo duro e non elastico in forza della sola rotazione da cui sia animato può diportarsi e rimbalzare non altrimenti che un corpo perfettamente elastico.

renti realmente esistano nelle calamite. A prova di tale asserzione abbiamo primieramente il fatto che nei fenomeni elettrodinamici ad un solenoide si può sempre sostituire una calamita o viciversa, senza che punto se ne alterino i risultati. Se gli effetti del tutto identici hanno da attribuirsi alle medesime cagioni, non v'ha dunque dubbio che i fenomeni magnetici debbono dirsi prodotti da correnti elettriche. La verità di questa conclusione appare manifesta quando si applicano ai casi particolari le formole stabilite dai geometri per rappresentare nella loro generalità i fenomeni eletcredere che il diamagnetismo derivi da una circolazione di elettrico puramente molecolare.

Di maggior peso delle precedenti sembrano a prima vista due altre difficoltà, delle quali una riguarda il diamagnetismo dei fluidi e l'altra la polarità diamagnetica, che alcuni fisici hanno creduto di avere osservata nei corpi respinti dalla calamita. Attesa cioè la somma mobilità delle molecole fluide sembrerebbe che i liquidi ed i fluidi aerei non potessero soffrire notabile resistenza per parte del vortice magnetico, epperò che tutti dovessero essere magnetici; laddove in ambidue questi stati i corpi sono per lo più diamagnetici. Ma se la mobilità delle molecole ne facilità l'orientazione, altrettanto poi rende ad esse difficile il mantenersi orientate; perchè gli assi di rotazione che nei fluidi sono naturalmente *istantanei*, devono perciò divenire *permanenti*. Sicchè un fluido sarà magnetico o diamagnetico secondochè l'azione cospirante delle molecole orientate prevale o no al lavoro che deve fare il vortice magnetico per ristabilire le orientazioni delle molecole incessantemente sturbate dal movimento intestino della massa fluida.

Quanto alla *polarità diamagnetica*, cioè ad una polarità propria delle sostanze diamagnetiche e contraria a quella delle calamite, sebbene tale polarità sia stata ammessa da Poggendorff, Weber, Plucker, Reich, Tyndall e da altri, pure fin qui non può dirsi rigorosamente dimostrata, potendosi in altro modo interpretare i risultati delle loro sperienze. Ma dato anche che siffatta polarità esista veramente, non per questo sarebbe da abbandonarsi l'ipotesi delle correnti molecolari. È un fatto assai noto, perchè di continuo lo vediamo verificato nelle navi, che un mobile in forza della resistenza che incontra è talvolta obbligato ad andare in direzione opposta a quella a cui lo spinge la forza motrice. Non è dunque impossibile che per l'azione del vortice magnetico le correnti molecolari sieno in parte costrette a circolare nel verso opposto del vortice medesimo, e venga così a manifestarsi una polarità contraria a quella della calamita.

Terminerò questa nota coll'osservare che qualunque sieno le difficoltà

ché presenta l'ipotesi delle correnti molecolari, non sarà però lecito, come vorrebbero alcuni (1), rovesciare la teoria d'Ampère ed invece di ridurre a correnti elettriche la polarità magnetica, far derivare le correnti da forze polari. Di questa ipotesi già proposta da Oersted, che suppone una polarità trasversale nei conduttori animati da correnti elettriche, si genera quando i conduttori si accostano o si discostano dai solenoidi, basterebbe da sè solo a provare l'identità della causa dei fenomeni elettrici e magnetici. Ma la prova diviene assai più concludente se si considera la grande resistenza che s'incontra allorchè si tenta di muovere quei conduttori. Fra le varie sperienze che mettono sott'occhio tale resistenza al moto, molto a proposito pel caso nostro è quella del cubo di rame sospeso da un cordoncino fra i poli di un poderoso elettromagnete. Torto fortemente il cordoncino e poi abbandonato a se stesso sicchè il cubo giri velocemente, appena il ferro si magnetizza subito il cubo si arresta, qualunque sia la sua velocità, nè torna di nuovo a muoversi se non dopo cessato il magnetimo. Stante la perfetta simmetria del cubo, la forza che lo arresta ed impedisce l'effetto della torsione non può nascere dalla sola forza ripulsiva o d'induzione, ma deve essere una forza revolutiva, onde possa generarsi una coppia capace di annullare la rotazione (2). Ciò posto se il mezzo che trasmette l'azione della calamita (dico della calamita, perchè il risultato della suddetta sperienza rimane lo stesso se all'elettromagnete si sostituisce una calamita bastantemente forte) è dotato di un moto revolutivo ed orbitale, siffatto moto deve necessariamente aver luogo anche nella calamita da cui procede la modificazione del mezzo circostante.

Il moto orbitale dell'elettrico nelle calamite ci viene pure chiaramente indicato dalla rotazione del piano di polarizzazione della luce. Si sa che se un fascetto di luce polarizzata è trasmesso nella direzione dell'asse polare attraverso una sostanza diafana collocata nel campo magnetico, il piano di polarizzazione devia dalla posizione primitiva, e la deviazione almeno nelle sostanze diamagnetiche, si fa sempre nel verso delle correnti ampèriane, cioè delle correnti che nell'ipotesi di Ampère concepirebbe un cilindro di ferro posto nel luogo della sostanza diafana. A spiegare questo fatto secondo la teoria che si dà in ottica della rotazione naturale, bisogna te-

---

(1) V. Questioni di elettrologia del Prof. Giovanni Cantoni — Pavia 1869.

(2) Nota giustamente il p. Secchi (*Op. cit.* Lib. 3. Cap. XIV) che i fisici non hanno fatto di questa sperienza il conto che merita. Ordinariamente l'arrestarsi del cubo viene da essi attribuito alle correnti indotte. Considerando però che le correnti indotte cessano quando il cubo si arresta, se queste possono fermare il cubo, non lo possono mantenere fermo, che a ciò si richiede una forza continua e revolutiva, come continua e revolutiva è la tensione del filo.

ner conto di una differenza molto sostanziale che passa fra l'una e l'altra rotazione. Nella rotazione naturale la deviazione si fa in due versi contrarii nell' andare e nel venire del raggio, epperò dipende dalla posizione della sostanza diafana relativamente al fascetto trasmesso. Al contrario nella rotazione magnetica il verso della rotazione non dipende dalla posizione della sostanza diafana ma della calamita, di maniera che un fascetto polarizzato può percorrere più volte la spessezza di una sostanza e per l' influenza della calamita uscirne sempre più deviato quanto è più lungo lo spazio percorso dentro la sostanza medesima. Questa capitale differenza ci fa intendere che la rotazione magnetica non è dovuta, come la naturale, alla diminuita velocità di uno dei due raggi circolari nei quali si scompone il fascetto polarizzato. Tanto più che se l'uno o l' altro dei due raggi componenti soffrisse del ritardo per l' azione del magnetismo, ne risulterebbe una doppia rifrazione; quale si osserva nel quarzo, e di questa doppia rifrazione prodotta dal magnetismo non si è finora avuto alcuno indizio.

Escluso pertanto il ritardo di uno dei due raggi nei quali s'intende decomposto il fascetto polarizzato, la discordanza di fase necessaria per la rotazione del piano di polarizzazione non può verificarsi altrimenti, che se nei due raggi le molecole si aggirino nelle loro orbite con velocità disuguali, talchè mentre le une fanno una intera circonferenza, le altre ne facciano una più o meno qualche frazione. Ammessa dunque tale disuguaglianza di velocità nelle molecole dei due raggi circolari che, senza separarsi l'uno dall' altro, vanno in verso contrario, ne viene per conseguenza che nel campo magnetico, epperò nelle calamite esiste una forza capace di accelerare i movimenti giratori che vanno nel verso delle correnti amperiane e ritardare quelli che vanno in direzione contraria (1). Ciò vale quanto dire che anche la rotazione magnetica ci conduce ad ammettere nelle calamite una circolazione di elettrico nel modo immaginato da Ampère (2).

---

(1) Questo ritardo si ha da intendere rapporto all' altro raggio; perchè le molecole diamagnetiche in forza della resistenza che oppongono al vortice magnetico tendono ad accelerare i movimenti eterei qualunque ne sia la direzione. Ma siccome siffatto acceleramento è maggiore per i movimenti che hanno la direzione stessa del vortice che per gli altri che hanno la direzione contraria; così tutto avviene come se quelli fossero accelerati e questi ritardati.

(2) Bisogna però notare che sebbene tutte le sostanze diamagnetiche facciano rotare il piano di polarizzazione nel verso delle correnti amperiane, pure fra le sostanze magnetiche ve ne sono alcune che lo fanno rotare nel verso contrario. Per intendere come questa rotazione negativa non si opponga a quanto si è detto finora, si osservi che mentre le sostanze diamagnetiche, in forza della resistenza che oppongono al vortice magnetico, accelerano i movimenti giratori in ambidue i raggi nei quali si scompone il fascetto polarizzato; le molecole magnetiche invece per la niuna resistenza che oppongono al vortice medesimo, come non alterano la densità ed elasticità dell' etere, così non alterano la velocità dei movimenti luminosi. A misura per tanto che in un corpo cresce il numero delle molecole magnetiche diminuirà l'accelerazione del raggio che va nel verso delle correnti amperiane, sicchè potrà finalmente prevalere l' acce-

Ma per arrivare a questa conclusione non fa mestieri ricorrere alla teoria che si dà in ottica della rotazione naturale, supponendo che il fascetto polarizzato all'entrare nella sostanza diafana si decomponga in due raggi che girino in verso contrario. Basta solo il fatto che le vibrazioni luminose rettilineamente polarizzate o immediatamente o meglio mediante le molecole pesanti sentano l'azione del magnetismo. È chiaro infatti che il piano di polarizzazione non potrebbe deviare verso la sinistra o la destra dell'osservatore, secondo che questi si trovi più vicino al polo Sud della calamita ovvero al polo Nord, come mostra la sperienza, se le molecole luminose per l'azione del magnetismo non ricevessero un impulso che relativamente alla parte superiore della calamita fosse diretto da Ovest ad Est nel primo caso, e da Est ad Ovest nel secondo, o ciò che torna lo stesso se nelle calamite non circolasse l'elettrico nel modo immaginato da Ampère.

Rimane ora che diciamo alcuna cosa intorno alle difficoltà che si sono fatte o potrebbero farsi sulla ipotesi delle correnti molecolari e sulla sufficienza di tale ipotesi a dare ragione del magnetismo.

Primieramente si è opposto non intendersi come il moto rotatorio delle molecole ed i vortici eterei che le circondano, si possano conservare per un tempo illimitato, mentre la resistenza e pressione del mezzo circostante dovrebbero bastare a distruggerli affatto. Al che si risponde che quando un corpo si muove in un fluido con velocità maggiore di quella con cui si propagano le pressioni nel fluido medesimo, quel corpo lascia dietro di sè un vuoto perfetto. Finchè dunque le rotazioni molecolari si manterranno bastantemente rapide, i vortici che le circondano non potranno essere distrutti dalla pressione del mezzo circostante. Quanto poi alle perdite che accompagnano la comunicazione del moto, se queste non venissero di continuo compensate da nuovi acquisti certo che le rotazioni molecolari dovrebbero sempre più indebolirsi fino ad estinguersi. Ma le molecole dei corpi essendo di continuo agitate dal movimento termico, gli urti scambievoli e generalmente eccentrici che ne conseguono possono fare sì che le rotazioni affievolite o distrutte in un istante, nell'istante appresso vengano rinforzate o ristabilite; di maniera che sebbene nei singoli atomi e nelle singole molecole il moto di rotazione debba indebolirsi ed estinguersi, cioè trasfor-

lerazione dell'altro che va nella direzione contraria. Quindi è che nei corpi formati di molecole parte magnetiche e parte diamagnetiche, la rotazione può essere positiva, negativa o nulla, secondochè prevale o no l'azione dell'una o dell'altra specie di molecole. Così p. e. una piccola quantità di percloruro di ferro sciolto nell'acqua fa diminuire la rotazione di questa, crescendo a poco a poco la quantità del percloruro il potere rotatorio della soluzione sempre più diminuisce fino a rovesciarsi, e quando la soluzionc sia molto concentrata, si ottiene uua rotazione negativa 6 o 7 volte maggiore della positiva prodotta dall'acqua.

marsi in moto vibratorio o traslatorio, pure in una massa qualunque la somma degli atomi e delle molecole dotate di una certa velocità di rotazione può sempre mantenersi sotto sopra costante. Per ciò che riguarda le rotazioni degli atomi eterei, queste facendosi necessariamente in un vuoto assoluto ed in masse tutte uguali, basta la sola inerzia per conservarle indefinitamente e gli urti che avvengono fra loro si riducono ad una comunicazione mutua di moto, per cui ciò che uno perde l'acquista l'altro.

Quanto alla sufficienza delle correnti molecolari a dare ragione dei fenomeni del magnetismo si potrebbe opporre: non essere lecito assegnare una causa generale ed un fenomeno speciale. Se le correnti molecolari fossero la causa delle correnti amperiane non s'intenderebbe come avvenga che ad eccezione del ferro e di alcuni suoi composti, le altre sostanze o non acquistano il magnetismo, o molto debolmente e solo quando sono sottoposte alle più energiche forze atte ad eccitarlo. Per rispondere con chiarezza a questa difficoltà bisogna distinguere le sostanze che come il ferro sono capaci di una ben decisa polarità magnetica dalle altre, le quali sebbene sentano in qualche modo l'azione delle forze magnetizzanti, pure non acquistano la polarità magnetica. Trattandosi delle prime non diciamo che le correnti le quali danno al ferro e suoi composti l'essere di calamita sieno quelle proprie delle singole molecole considerate separatamente l'una dall'altra. È invece assai più probabile che le dette correnti risultino da una speciale forma di gruppi molecolari che si generino nella formazione di alcuni solidi. Il fatto è che il ferro quando sia ridotto allo stato di molecole disgiunte per mezzo della fusione perde quasi del tutto la virtù magnetica, nè si conosce corpo alcuno che nello stato liquido od aeriforme sia capace di una ben marcata polarità magnetica. La ragione di ciò sembra potersi desumere dalla estrema piccolezza delle molecole e dei vorticetti eterei che le accompagnano, nei quali le due opposte direzioni della corrente sieno tanto fra loro vicine da paralizzare in gran parte l'azione della forza estrinseca tendente ad orientarle. Pare cioè che colle molecole disgregate accada in ordine al magnetismo come in elettrostatica coi piccoli corpicciuoli perfettamente isolati, che difficilmente sono attratti da un corpo elettrizzato, appunto perchè le due opposte tensioni destate dall'influsso sono a un dipresso alla stessa distanza dal corpo elettrizzato. Ma non sarà più così quando le molecole si uniscano assieme a formare dei gruppi da prima semplici e poi sempre più complicati; perchè allora può avvenire che le singole molecole si dispongano in maniera che in ciascun gruppo la somma delle correntelle molecolari equivalga ad una corrente finita o anche infini-

tesima, ma di ordine tanto meno elevato rispetto alle singole correnti molecolari, da sentire potentemente ed efficacemente l'azione di una forza estrinseca. Queste correnti, che chiameremo *polimolecolari*, sarebbero le correnti amperiane, e rimarrebbe dimostrato come si possa intendere, che sebbene le molecole di tutti i corpi sieno circolate da correnti clettriche, pure il numero delle sostanze magnetiche è molto scarso e molto diverso il grado di magnetismo di cui sono esse capaci. È infatti molto verisimile che la proprietà di formare dei gruppi di molecole disposte nel modo che si è detto debba variare notabilmente da sostanza a sostanza, e che mentre in alcune come nel ferro, che ha struttura visibilmente fibrosa, si trova in grado eminente, in altre invece non se ne trovi che qualche traccia o manchi affatto.

Di più affinchè un corpo si mostri dotato di polarità magnetica è pure necessario che le sue molecole o gruppi molecolari sieno mobili per modo, che le correnti molecolari o polimolecolari sotto l'azione del vortice magnetico possano disporsi le une parallele alle altre, senza che non formerebbero un sistema di forze cospiranti; ma piuttosto sarebbero di ostacolo al libero corso del vortice medesimo. Ora è ben naturale che, come avviene di tutte le proprietà dipendenti dalla coesione siffatta mobilità delle molecole o dei gruppi molecolari sia diversa nelle diverse sostanze. Sicchè possiamo conchiudere che la suddetta universalità delle correnti molecolari non solamente non si oppone alla scarsezza delle sostanze capaci di polarità magnetica; ma di più ci fa intendere che nessun corpo deve mostrarsi affatto insensibile all'azione delle calamite; come di fatto insegna la sperienza. E per verità se le molecole di tutti i corpi sono circolate da correnti elettriche, quando un corpo si trova in presenza di una calamita bastantemente energica, o quelle correntelle possono secondare il vortice magnetico che le investe o nol possono. Nel primo caso per la cresciuta rarefazione del mezzo interposto si avrà un'apparente attrazione, ed il corpo sarà più o meno magnetico; nel secondo invece la resistenza che incontra il vortice a proseguire il suo corso sforzerà il corpo a portarsi ove è minore l'attività, cioè ad allontanarsi dalla calamita, e si dirà diamagnetico. Quindi si vede che un corpo non potrà rimanere del tutto indifferente all'azione del magnetismo se non sia formato di molecole parte magnetiche e parte diamagnetiche in tale proporzione che i due contrari effetti si elidano. Parimenti si vede che attesa la rapidità con cui diminuisce l'azione delle calamite col crescere della distanza, la ripulsione diamagnetica non sarà mai molto notabile, tanto se il corpo sia dotato di correnti polimolecolari quanto se non lo sia. L'esem-

pio di corpi diamagnetici dotati di correnti polimolecolari ce l'offrono i metalli, nei quali lo stato diamagnetico sensibilmente svanisce per la fusione; al contrario nel fosforo e negli altri corpi non metallici, che continuano ad essere respinti dalle calamite anche nello stato liquido ed aereo, è da trodinamici. Si vede infatti da coteste formole che tutte le conseguenze che se ne possono dedurre in ordine alle azioni scambievoli fra le correnti elettriche ed i solenoidi, sperimentalmente si verificano anche rispetto alle azioni mutue fra le correnti elettriche e le calamite. Un esempio di ciò assai rimarchevole ce l' offre l' applicazione di quelle formole alla ricerca del momento di rotazione di una corrente per l' azione di un solenoide o di un solenoide per l'azione di una corrente diretta lungo il suo asse. Risulta da quelle formole che se i due punti di applicazione della corrente sieno ambidue sull' asse del solenoide, ovvero sul suo prolungamento da una parte e dall' altra o da una sola di esse parti, il momento di rotazione in ambidue i casi è nullo. Che se i punti di applicazione della corrente sieno uno sul prolungamento dell'asse del solenoide e l'altro compreso fra le due estremità del solenoide medesimo, il momento di rotazione è costante ossia non dipende dalla estensione della corrente mobile nè dalla maggiore o minore porzione di asse percorso dalla corrente. Queste inattese illazioni del calcolo si veggono di fatto verificate tanto pei solenoidi che per le calamite. Rispetto alle calamite ne abbiamo una prova nella notissima sperienza della calamita galleggiante sul mercurio per mezzo di un contrapeso di platino. La porzione rettilinea di corrente che percorre l'asse della calamita fino ad arrivare al mercurio è come se non esistesse, ossia non ha influsso alcuno sulla rotazione della calamita; ed il verso di questa rotazione si rovescia capovolgendo la calamita, come si rovescia la rotazione del solenoide rovesciata la direzione della sua corrente. Tanta identità di effetti dei solenoidi e delle calamite in tanta varietà di casi, quanti se ne comprendono nelle formole suddette è una prova evidente che la forza la quale anima le calamite è la stessa, ed opera nello stesso modo di quella che circola nei solenoidi, epperò che anche le calamite sono circolate da correnti elettriche nella maniera supposta da Ampère.

Alla medesima conclusione anche più direttamente ci conduce quella classe di fenomeni che ci presentano i corpi collocati nel campo magnetico, cioè in vicinanza dei poli delle calamite. I principali fra questi fenomeni sono, oltre lo sviluppo nei conduttori di correnti indotte, la resistenza che si oppone al moto dei conduttori medesimi e la deviazione del piano di po-

larizzazione che soffre la luce nell' attraversare i corpi collocati nel campo medesimo. Lo sviluppo di correnti elettriche nei conduttori che penetrano nel campo magnetico non essendo altro che un fenomeno d'induzione elettro-dinamica in tutto e per tutto identico collo sviluppo di correnti che non si hanno altre prove tranne i fatti stessi che dovrebbe spiegare. Nè di questi fatti può dare ragione che in parte, cioè solo in quanto si riferiscono alle azioni mutue delle calamite fra loro e coi circuiti chiusi. Quando si viene all' altra numerosa classe di fenomeni nei quali il lavoro prodotto dalla corrente elettrica è continuo nonostante gli ostacoli che gli si oppongono, le forze polari necessariamente dirette ad un centro fisso non sono più sufficienti; ma si richiedono delle forze capaci di restituire alla corrente la velocità perduta nel vincere le resistenze. Finchè dunque non si scoprano de' fatti che ce la dimostrino insufficiente la teoria d' Ampère sarà sempre il modo più naturale di ridurre ad un solo principio i fenomeni del magnetismo e della elettricità dinamica.

THÉORIE DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

PAR LE P. TH.LE PEPIN, S. J.

Classification des formes cubiques de déterminant négatif.

61. Dans notre premier Mémoire sur les fonctions homogènes du troisième degré à deux variables, nous avons exposé la théorie de leur classification. Nous avons ramené cette classification à la résolution des deux problèmes suivants:

1.° *Trouver les classes des formes quadratiques qui peuvent correspondre comme formes déterminantes à des formes cubiques d'un déterminant donné.*

2.° *Déterminer les classes cubiques qui correspondent à ces classes quadratiques.*

Le chapitre II (n.os 12–23) a été consacré à la recherche des caractères par lesquels on peut distinguer les formes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques. Dans les chapitres suivants nous avons donné une méthode pour déterminer les classes cubiques qui correspondent à des classes quadratiques données. Nous donnerons dans le présent Mémoire de nombreux exemples de classification, mais en nous bornant aux formes dont le déterminant est négatif. Nous distinguerons particulièrement le cas où, le déterminant du covariant quadratique étant impair, ce covariant appartient à l'ordre improprement primitif et correspond à une forme cubique d'un déterminant quadruple. Ce cas n'a été qu'effleuré dans le n.° 40. Quoique la méthode à suivre soit toute semblable à celle qui a été exposée pour les autres cas, il ne sera pas inutile d'y revenir.

Déterminants négatifs sans diviseur carré autre que 4.

62. Designons par Δ un nombre négatif, impair, sans diviseur carré. Les formes déterminantes des formes cubiques dont le déterminant D est égal à Δ, sont toutes renfermées dans l'ordre improprement primitif du déterminant Δ; elles s'obtiennent en multipliant par 2 les coefficients du covariant quadratique

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad B^2 - 4AC = \Delta.$$

Les classes auxquelles appartiennent ces formes déterminantes s'obtiennent au moyen du Théorème XI (n° 22), savoir:

Les deux nombres A, B *étant impairs, et le nombre* A *étant premier, non diviseur de* B, *la seule condition nécessaire pour que la forme improprement primitive* (2A, B, 2C) *soit la forme déterminante d'une forme cubique, est que le cube* A^3 *ou son quadruple* $4A^3$ *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $\Delta = B^2 - 4AC$.

Lorsque le cube A^3 est représenté par la classe principale, la classe (A, B, 4C) par laquelle le nombre A est représenté proprement, doit produire par triplication la classe principale; car deux formes quadratiques qui représentent proprement une même puissance d'un nombre premier sont toujours équivalentes, proprement ou improprement. Or le nombre A^3 est représenté proprement par la classe obtenue par la triplication de la classe (A, B, 4C). Si donc le cube A^3 est représenté proprement par la classe principale, cette classe est identique avec celle qui résulte de la triplication de la classe (A, B, 4C). Dans ce cas la forme déterminante (2A, B, 2C) s'obtient en composant la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ avec une forme (A, B, 4C) dont la triplication donne la classe principale.

Lorsque le nombre $4A^3$ est représenté proprement par la classe principale $(1,\ 0,\ -\Delta)$, on conclut de l'équation

$$4A^3 = t^2 - \Delta u^2$$

que Δ est de la forme $8l + 5$. De plus, comme les deux facteurs 4 et A^3 sont premiers entre eux, leur produit ne peut être représenté proprement par la forme principale qu'autant qu'ils sont eux-mêmes représentés par deux formes équivalentes. Or, le nombre A étant premier, le cube A^3 ne peut être représenté proprement que par les deux classes opposées qui résultent de la triplication des deux classes $(A, \pm B, 4C)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre A. Il est donc nécessaire que les classes $\left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right)$ s'obtiennent par la triplication des classes $(A, \pm B, 4C)$. Cette condition suffit pour déterminer ces dernières classes.

On pourra donc trouver la classe quadratique déterminante (2A, B, 2C) au moyen des deux théorèmes suivants :

1° *Soit* Δ un déterminant négatif de la forme $8l + 1$; les formes cubiques

du déterminant Δ ont pour formes déterminantes les formes improprement primitives obtenues en composant la forme $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ avec les formes proprement primitives dont la triplication donne la classe principale.

2° Soit Δ un déterminant négatif de la forme $8l+5$; les formes déterminantes des formes cubiques du déterminant Δ sont renfermées dans les classes improprement primitives qui résultent de la composition de la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right)$ avec les classes proprement primitives dont la triplication donne les trois classes

$$(1,\ 0,\ -\Delta),\ \left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right).$$

63. Pour les formes cubiques du déterminant $D = 4\Delta$, on doit considérer à part le cas où Δ est de la forme $8l+1$. Dans ce cas les formes déterminantes peuvent être, en partie, improprement primitives. Car nous avons démontré (n^{os} 21, 22) que:

Le nombre B *étant impair, si l'on désigne par* A *un nombre premier non-diviseur de* 2B, *la seule condition nécessaire pour que la forme improprement primitive* (2A, B, 2C) *soit la forme déterminante d'une forme cubique du determinant* $4(B^2-4AC)$, *est que le produit du cube* A^3 *multiplié par* 8 *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $\Delta = B^2 - 4AC$.

Or, comme les deux facteurs 8 et A^3 sont premiers entre eux, pour que leur produit soit représenté proprement par la forme principale $(1,\ 0,\ -\Delta)$, il faut qu'ils soient représentés l'un et l'autre par deux classes opposées. Or le nombre 8 n'est représenté proprement que par les deux classes L, L$'$ représentées par le deux formes

$$\left(8,\ \mp\tau,\ \frac{\tau^2-\Delta}{8}\right) \text{ où } \tau = 1 \text{ ou } 3.$$

Le cube A^3 n'est représenté proprement que par les deux classes qui résultent de la triplication des deux classes $(A,\ \pm B,\ 4C)$ auxquelles appartiennent les réprésentations du nombre A. Les deux classes $(A,\ \pm B,\ 4C)$ sont donc déterminées par la condition de produire par triplication les deux classes L, L$'$. De là résulte la méthode suivante:

Pour trouver les classes quadratiques improprement primitives du déter-

minant $\Delta = 8l + 1$, qui correspondent à des formes cubiques du déterminant quadruple 4Δ, il faut d'abord chercher les classes proprement primitives dont la triplication produit les deux classes L, L'. On représentera ces classes par des formes (A, B, 4C) dont le premier élément A soit un nombre premier non diviseur de B. Enfin les coefficients de la forme cubique (a, b, c, d), dont le covariant quadratique est la forme (2A, B, 2C), seront déterminés au moyon des formules

$$\text{I.} \quad \left| \begin{array}{ll} 8A^3 = t^2 - \Delta a^2, & 2Ab - Aa = t, \\ Ac - Bb + Ca = 0, & Ad - Bc + Cc = 0. \end{array} \right.$$

dont les deux premières peuvent être remplacées par la formule unique

$$(1) \qquad 2A^2 = Ab^2 - Bab + Ca^2.$$

64. Dans le même cas où Δ est de la forme $8l + 1$, il faut aussi tenir compte des formes cubiques du déterminant 4Δ qui correspondent à des formes proprement primitives du déterminant Δ. On a d'abord la classe cubique représentée par la forme $(0, 1, 2, 3 + \Delta)$ dont le covariant quadratique $(1, 1, 1 - \Delta)$ représente la classe principale du déterminant Δ. Les autres classes proprement primitives du déterminant Δ qui corrispondent à des formes cubiques du déterminant quadruple se déterminent au moyen du Théorème XII du n° 22. En supposant l'une de ces classes représentée par une forme (A, B, 4C) dont le premier élément, A, est un nombre premier non diviseur de 2Δ, l'unique condition nécessaire pour qu'elle corresponde à des formes cubiques est que le cube A^3 soit représenté proprement par la forme principale $(1, 0, -\Delta)$ (n° 22). Or le cube A^3 n'est représenté proprement que par les deux classes opposées qui résultent de la triplication des deux classes $(A, \pm B, 4C)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre premier A. Les deux classes $(A, \pm B, 4C)$ sont donc déterminées par la condition de produire par leur triplication la classe principale. On obtient ensuite les coefficients de la forme cubique correspondante (a, b, c, d) au moyen des formules

$$\text{II.} \quad \left| \begin{array}{ll} A^3 = t^2 - \Delta a^2, & Ab - Ba = t, \\ Ac - 2Bb + 4Ca = 0, & Ad - Bc + 4Cb = 0, \end{array} \right.$$

dont les deux premières peuvent être remplacées par l'équation

$$(2)\qquad A^2 = Ab^2 - 2Bab + 4Ca^2.$$

65. Lorsque le déterminant Δ est de la forme $8l + 5$, l'équation

$$8A^3 = t^2 - \Delta u^2$$

est impossible en nombres entiers si A est impair. Dans ce cas les formes cubiques du déterminant 4Δ ont pour covariants des formes quadratiques, proprement primitives, du déterminant Δ, savoir les formes dont la triplication donne la forme principale $(1, 0, -\Delta)$. Si l'on désigne par (A, B, C) l'une de ces formes, les coefficients de la forme cubique correspondante (a, b, c, d) s'obtiennent au moyen des formules suivantes:

$$\text{III.}\quad \left|\begin{array}{ll} A^3 = t^2 - \Delta a^2, & Ab - Ba = t, \\ Ac - 2Bb + Ca = 0, & Ad - 2Bc + Cb = 0, \end{array}\right.$$

dont les deux premières peuvent être remplacées par la suivante :

$$(3)\qquad A^2 = Ab^2 - 2Bab + Ca^2.$$

Lorsque Δ est de la forme $4l + 3$, l'équation

$$B^2 - 4AC = \Delta$$

est impossible, et, par conséquent, il n'existe pas de forme cubique du déterminant Δ. Les formes cubiques du déterminant 4Δ ont pour covariants des formes quadratiques proprement primitives du déterminant Δ, parce que l'équation

$$(\tfrac{1}{2}B)^2 - AC = \Delta = 4l + 3$$

exige, relativement au module 4, que l'un des deux nombres A ou C soit impair, et les trois nombres A, $\frac{1}{2}$B, C sont premiers entre eux, puisque l'on suppose que Δ n'a pas de diviseur carré. Les classes quadratiques du déterminant Δ qui correspondent à des formes cubiques sont déterminées par le théorème XII du n° 22, d'où l'on déduit, comme précédemment, que ces classes quadratiques sont celles dont la triplication donne pour résultante la classe principale $(1, 0, -\Delta)$. Les coefficients des formes cubiques correspondantes s'obtiennent au moyen des formules (III).

66. La classe cubique du déterminant $D = 4\Delta$ qui correspond à la classe quadratique principale du déterminant Δ, est connue d'une manière générale par le théorème suivant du n° 25 :

La classe quadratique principale $(1, 1, 1 - \Delta)$ *d'un déterminant négatif* Δ *correspond à une classe cubique unique, représentée par la forme* $(0, 1, 2, 3 + \Delta)$, *excepté lorsque* $\Delta = -1$; *dans ce dernier cas, la classe* $(1, 1, 2)$ *correspond à deux classes cubiques opposées, représentées par les deux formes* $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 2, 2)$ *improprement équivalentes.*

Les classes cubiques, qui correspondent à des classes proprement primitives du déterminant Δ, différentes de la classe principale, se déterminent à l'aide des formules II ou III, suivant que Δ est de la forme $8l + 1$ ou non; on doit tenir compte des deux théorèmes suivants (nᵒˢ 24 et 28) :

Les seules classes quadratiques proprement primitives qui puissent correspondre à des formes cubiques, sont celles dont la triplication donne la classe principale.

Toute classe quadratique du déterminant négatif $\Delta < -1$, *dont la triplication donne la classe principale, correspond à une classe cubique et à une seule.*

Le premier théorème détermine les coefficients A, B, C qui figurent dans les formules citées II et III. Après avoir trouvé les classes proprement primitives dont la triplication donne la classe principale, on représentera chacune de ces classes par une forme (A, B, 4C) ou (A, B, C), suivant la forme de Δ, dont le premier élément A soit un nombre premier non diviseur de 2Δ.

Le second théorème permet de se borner aux valeurs positives de a dans les solutions de l'équation

$$A^3 = t^2 - \Delta a^2,$$

car en changeant les signes des deux nombres t, a, on obtiendrait une seconde forme cubique, équivalente à la première.

Nous avons supposé le nombre A premier, afin de simplifier les démonstrations. Mais si l'on remplace la forme (A, B, C) par une forme équivalente (P, Q, R) dont le premier élément P soit un nombre composé, on ne peut obtenir que la classe cubique unique, déterminée au moyen de la forme (A, B, C). Néanmoins l'équation

$$P^3 = t^2 - \Delta a^2$$

peut alors admettre au grand nombre de solutions. Mais comme la formule

$$Pb - Qa = t$$

doit donner pour b une valeur entière, on doit rejeter toutes les solutions qui ne satisfont pas à cette condition. Or parmi les diverses représentations de P^3 par la forme $(1, 0, -\Delta)$, deux seulement satisfont à cette condition, savoir les deux représentations qui appartiennent à la valeur $-Q$ de l'expression $\sqrt{\Delta}$ (mod. P). On peut donc faire le choix de la forme $(A, B, 4C)$ ou (A, B, C), sans exiger que le premier élément A soit un nombre premier.

$$\Delta = 8l + 1\,; \qquad D = 4\Delta \text{ et } D = \Delta.$$

67. Nous commencerons nos exemples de classification par le cas où le déterminant D est le quadruple d'un nombre impair $8l + 1$, afin de justifier une observation que nous avons faite (n° 3) sur un théorème d'Eisenstein. D'après ce théorème, lorsque $-\Delta$ est un nombre premier p de la forme $4l + 3$, les seules classes des formes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques du déterminant $4\Delta = -4p$ sont celles qui, par leur triplication donnent la classe principale. Lorsque le nombre premier p est de la forme $8h + 7$, ce théorème est inexact, car outre les classes indiquées, classes qui appartiennent à l'ordre proprement primitif, il y en a d'autres, improprement primitives, qu'on obtient en composant la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ avec les classes proprement primitives dont la triplication donne les classes $\left(8,\ \pm\tau,\ \frac{\tau^2-\Delta}{8}\right)$ par lesquelles le nombre 8 est representé proprement.

Soit $\Delta = -7$. Uue seule classe renferme toutes les formes proprement primitives du déterminant -7, savoir la classe principale $(1, 1, 8)$ qui se confond dans ce cas car avec les deux classes $\left(8, \mp\tau, \frac{\tau^2-\Delta}{8}\right)$. Cette classe correspond à une classe cubique du déterminant -28, réprésentée par la forme $(0, 1, 2, -4)$. L'ordre improprement primitif se réduit aussi à une classe unique représentée par la forme $(2, 1, 4)$. Cette classe correspond à une classe cubique du même déterminant, reprdsentée par la forme $(0, 1, 1, -1)$. Elle correspond ausei à des formes cubiques du déterminant -28, que l'on détermine au moyen des formules (I) en y faisant $A = B = 1$, $C = 2$, ce qui donne les formules suivantes :

$$8 = t^2 + 7a^2,\ 2b - a = t,\ c - b + 2a = 0,\ d - c + 2b = 0.$$

On en déduit deux solutions, en se bornant aux valeurs positives de a.

1° $a = 1,\ t = 1,\quad b = 1,\ c = -1,\ d = -3;$

2° $a = 1,\ t = -1,\ b = 0,\ c = -2,\ d = -2.$

Ainsi la forme (2, 1, 4) est le covariant quadratique des deux formes cubiques

$$(1, 1, -1, -3),\ (1, 0, -2, 2).$$

Il y a lieu d'examiner si ces deux formes sont équivalentes, ou bien si elles représentent deux classes distinctes. Si ces deux formes sont équivalentes, la transformation de l'une en l'autre s'effectue par une substitution qui change le covariant de l'une en celui de l'autre. Comme ces deux formes ont le même covariant (2, 1, 4), la substitution qui les transforme l'une en l'autre doit changer en elle-même la forme (2, 1, 4). Or il n'y a que quatre transformations de la forme (2, 1, 4) en elle-même, savoir les deux transformations propres $\pm(1, 0; 0, 1)$ et les deux transformations impropres $\mp(1, 1; 0, -1)$. Les deux substitutions $\pm(1, 0; 0, 1)$ changent la forme $(1, 1, -1; -3)$ en elle-même ou en la forme $(-1, -1, 1, 3)$. La substitution $(1, 1; 0 -1)$ change cette forme en $(1, 1, -2, -2)$. Par conséquent les deux formes considérées ne sont pas proprement équivalentes; mais elles le sont improprement. Elles représentent par conséquent deux classes opposées, que l'on peut représenter aussi par les deux formes $(1, 1, -1, -3)$, $(1, -1, -1, 3)$.

Le déterminant -28 *fournit trois classes de formes cubiques, représentées respectivement par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -4),\ (1, 1, -1, -3),\ (1, -1, -1, 3);$$

le déterminant -7 *n'en donne qu'une, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -1)$.

68. $\Delta = -15$. Le déterminant -15 n'offre que deux classes de formes quadratiques proprement primitives, représentées par les deux formes (1, 1, 16), (3, 0, 5). La seule classe dont la triplication produise la classe principale est cette classe principale elle-même. La classe principale (1, 1, 16) est donc la seule classe proprement primitive qui corresponde à des classes cubiques, et elle correspond à une classe unique, représentée par la forme $(0, 1, 2, -12)$.

Le nombre 8 est représenté proprement par la classe (3, 0, 5) qui se reproduit elle-même par triplication. Si l'on compose cette classe avec la classe improprement primitive (2, 1, 8), on obtient la classe (6, 3, 4), qui d'après ce que nous avons démontré plus haut (n.° 63), correspond à des formes cubiques que l'on détermine en prenant $A = B = 3$, $C = 2$ dans les formules I. On trouve ainsi

$$8.27 = t^2 + 15a^2,\quad 6b - 3a = t,$$

$$3c - 3b + 2a = 0,\quad 3d - 3c + 2b - 0.$$

On résout la première équation en prenant $a = 3, t = \pm 9$.

$$1^\circ \; a = 3, \; t = 9; \; b = 3, \; c = 1, \; d = -1;$$

$$2^\circ \; a = 3, \; t = -9, \; b = 0, \; c = -2, \; d = -2.$$

On reconnaît aisément que les deux formes $(3, 3, 1, -1)$, $(3, 0, -2, -2)$ ne sont pas proprement équivalentes ; car, si elles l'étaient, elles se transformeraient l'une en l'autre par l'une des substitutions propres qui changent en lui-même leur covariant commun $(6, 3, 4)$. Or les deux substitutions $\mp (1, 0; 0, 1)$ sont les seules substitutions propres qui changent en elle-même la forme $(6, 3, 4)$, et aucune de ces deux substitutions ne transforme l'une en l'autre les deux formes considérées. La substitution impropre $(1, 1; 0, -1)$ transforme $(3, 3, 1, -1)$ en $(3, 0, -2, -2)$; par conséquent ces deux formes sont improprement équivalentes.

Le déterminant -15 ne présente qu'une seule classe cubique représentée par la forme $(0, 1, 1, -3)$. En résumé

Les formes cubiques du déterminant -60 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -12), \; (3, 3, 1, -1), \; (3, -3, 1, 1);$$

celles du déterminant -15 *sont renfermées dans une seule classe representée par la forme* $(0, 1, 1, -3)$.

69. $\Delta = -23$. Le déterminant -23 n'offre que trois classes quadratiques proprement primitives: $(1, 1, 24)$, $(3, \pm 1, 8)$. Comme ces trois classes produisent par triplication la classe principale, chacune d'elles correspond à une classe cubique, savoir, la classe $(1, 1, 24)$, à la classe cubique $(0, 1, 2, -20)$; la classe $(3, 1, 8)$, à une classe (a, b, c, d) que l'on détermine en faisant $A = 3$, $B = 1$, $C = 2$ dans les formules II, ce qui donne :

$$27 = t^2 + 23a^2, \; 3b - a = t, \; 3c - 2b + 8a = 0, \; 3d - 2c + 8b = 0;$$

$$a = 1, t = \pm 2, \; b = 1, \; c = -3, \; d = -4;$$

enfin la substitution impropre $(1, 0; 0, -1)$ donne la classe $(1, -1, -2, 4)$ qui correspond à la classe quadratique $(3, -1, 8)$.

Comme les deux classes $(3, \pm 1, 8)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8 ne s'obtiennent pas par triplication, il n'existe pas de

classe cubique du déterminant -4.23 qui corresponde à une classe quadratique improprement primitive.

L'ordre improprement primitif du déterminant -23 se compose de trois classes représentées par les trois formes $(2, 1, 12)$, $(6, \pm 1, 4)$. Ces trois classes correspondent à trois classes cubiques représentées par les trois formes

$$(0, 1, 1, -5), \quad (2, 1, -1, -1), \quad (2, -1, -1, 1).$$

Les formes cubiques du déterminant -90 *sont renfermées dans trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -20), \quad (1, 1, -2, -4), \quad (1, -1, -2, 4);$$

celles du déterminant -23 *sont aussi renfermées dans trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 1, -5), \quad (2, 1, -1, -1), \quad (2, -1, -1, 1).$$

70. Les trois dernières formes se déduisent des précédentes en doublant le premier coefficient, puis en divisant le troisième coefficient par 2 et le quatrième par 4. On peut vérifier d'une manière générale que toute forme cubique du déterminant D dont le premier coefficient est pair, correspond à une forme cubique du déterminant quadruple 4D, laquelle s'obtient en divisant par 2 le premier coefficient, puis en multipliant le troisième coefficient par 2 et le quatrième par 4. Considérons en effet les deux formes cubiques (a, b, c, d), (a', b', c', d') liées entre elles par les relations

$$a' = \tfrac{1}{2}a, \quad b' = b, \quad c' = 2c, \quad d' = 4d.$$

Si l'on désigne respectivemente par A, B, C; A', B', C' les coefficients de leurs covariants quadratiques, on a

$$A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd,$$

$$A' = b'^2 - a'c', \quad B' = b'c' - a'd', \quad C' = c'^2 - b'd';$$

au moyen des relations précédentes on trouve

$$A' = A, \quad B' = 2B, \quad C' = 4C;$$

$$D' = B'^2 - 4A'C' = 4(B^2 - 4AC) = 4D.$$

Inversement, si l'on connait une forme cubique du déterminant 4D, dont

le troisième coefficient soit divisible par 2 et le quatrième par 4, on en déduit une forme cubique du déterminant D, en doublant le premier coefficient, puis en divisant le troisième coefficient par 2 et le quatrième par 4. On déduit en effet des relations précédentes

$$a = 2a', \ b = b', \ c = \tfrac{1}{2}c', \ d = \tfrac{1}{4}d'.$$

Lorsque D est impair, la forme déterminante de la forme cubique (a, b, c, d) est une forme improprement primitive (2A, B, 2C) que l'on obtient en composant la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-D}{2}\right)$ avec la forme déterminante (A', B', C') de la forme cubique correspondante, du déterminant 4D.

71. $\Delta = -31$. L'ordre proprement primitif du déterminant -31 se compose des trois classes (1, 1, 32), (5, ± 3, 8), et l'ordre improprement primitif, des trois classes (2, 1, 16), (10, ± 3, 4). Chacune de ces classes correspond à une classe cubiqne, puisque les trois premières classes produisent par triplication la classe principale et que les trois autres s'en déduisent en les composant avec la classe (2, 1, 16). Les deux classes proprement primitives (5, ± 3, 8) ne s'obtenant pas par triplication, il n'existe pas de forme cubique du déterminant -4.31 dont le covariaut quadratique soit une forme imoropremeut primitive.

La classe principale (1, 1, 32) correspond à une classe cubique du déterminant -4.31 représentée par la forme (0, 1, 2, −28). La classe cubique à laquelle correspond la classe quadratique (5, 3, 8) s'obtient au moyen des formules

$$5^3 = t^2 + 31a^2, \qquad 5b - 3a = t,$$

$$5c - 6b + 8a = 0, \ \ 5d - 6c + 8b = 0,$$

d'où l'on déduit $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -4$. Par conséquent les trois classe (1, 1, 32), (5, ± 3, 8) correspondent aux trois classes cubiques

$$(0, 1, 2, -28), \quad (2, 1, -2, -4), \quad (2, -1, -2, 4),$$

d'où l'on déduit les trois classes cubiques

$$(0, 1, 1, -7), \quad (4, 1, -1, -1), \quad (4, -1, -1, 1)$$

auxquelles correspondent les classes improprement primitives (2, 1, 16), (10, ± 3, 4), en appliquant la règle du n° précédent. Donc

Les formes cubiques du déterminant -124 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -28), \quad (2, 1, -2, -4), \quad (2, -1, -2, 4);$$

celles du déterminant -31 *sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 1, -7), \quad (4, 1, -1, -1), \quad (4, -1, -1, 1)$$

72. $\Delta = -39$. Ce déterminant fournit quatre classes de formes quadratiques, proprement primitives, renfermées dans une même période :

$$L = (5, 1, 8), \quad L^2 = (3, 0, 13), \quad L^3 = (5, -1, 8), \quad L^4 = (1, 0, 39).$$

La classe principale ne peut s'obtenir par la triplication d'aucune classe autre qu'elle-même; elle est par conséquent la seule qui corresponde à des formes cubiques. Pour la même raison la classe $(2, 1, 20)$ est la seule classe improprement primitive qui corresponde à des formes cubiques du déterminant -39.

Comme les deux classes $(5, \pm 1, 8)$ s'obtiennent par la triplication l'une de l'autre, les deux classes $(10, \pm 1, 4)$ correspondent à des classes cubiques du déterminant -4.39. La classe cubique à laquelle correspond la classe quadratique $(10, 1, 4)$ se déduit des formules I, en faisant $A = 5$, $B = 1$, $C = 2$, ce qui donne

$$8.125 = t^2 + 39a^2, \quad 10b - a = t, \quad 5c - b + 2a = 0, \quad 5d - c + 2b = 0;$$

$$a = 1, \quad t = \pm 31, \quad b = -3, \quad c = -1, \quad d = 1.$$

La substitution $(1, 0; 0, -1)$ donne ensuite la classe qui correspond à la classe quadratique opposée $(10. -1, 14)$. Donc

Les formes cubiques du déterminant -156 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -36), \ (1, -3, -1, 1), \ (1, 3, -1, -1);$$

celles du déterminant -39 *sont comprises dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 1, -9)$.

73. $\Delta = -47$. Nous avons vu (n° 45) que les formes quadratiques, pro-

prement primitives, du déterminant -47 sont distribuées en cinq classes formant une période unique

$$L = (3, 1, 16), \; L^2 = (7, 3, 8), \; L^3 = (7, -3, 8), \; L^4 = (3, -1, 16), \; L^5 = 1.$$

L'indice 5 de la période étant premier avec 3, chaque classe s'obtient par la triplication d'une classe et d'une seule. La classe principale est donc la seule dont la triplication donne la classe principale; par conséquent elle est la seule classe proprement primitive du déterminant -47 qui corresponde à des formes cubiques; elle correspond à la classe cubique $(0, 1, 2 - 44)$. De même la classe $(2, 1, 24)$ est la seule classe improprement primitive qui corresponde à des formes cubiques du déterminant -47; elle correspond à la classe cubique $(0, 1, 1, -11)$.

Les deux classes $(7, \pm 3, 8)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, s'obtiennent par la triplication des deux classes $(3, \pm 1, 16)$; par conséquent les deux classes $(7, \pm 1, 8)$ correspondent à des formes cubiques du déterminant -4.47. En faisant dans les formules I, $A = 3$, $B = 1$, $C = 4$, on obtient les équations

$$8.27 = t^2 + 47a^2, \; 6b - a = t, \; 3c - b + 4a = 0, \; 3d - c + 4b = 0,$$

d'où l'on déduit la classe cubique $(1, -2, -2, 2)$ qui correspond à la classe quadratique $(6, 1, 8)$. Donc

Les formes cubiques du déterminant -188 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -44), \; (1, -2, -2, 2), \; (1, 2, -2, -2);$$

celles du déterminant -47 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 1, -11)$.

74. $\Delta = -55$. L'ordre quadratique proprement primitif du déterminant -55. se compose de quatre classes renfermées dans la période suivante:

$$L = (7, 1, 8), \; L = (5, 0, 11), \; L^3 = (7, -1, 8), \; L^4 = (1, 1, 56).$$

Comme les deux classes $(7, \pm 1, 8)$ par lesquelles le nombre 8 est représenté s'obtiennent par la triplication l'une de l'autre, les deux classes $(14, \pm 1, 4)$ correspondent à des classes cubiques du déterminant -4.55, que l'on détermine au moyen des formules

$$8.343 = t^2 + 55a^2,\ 14b - a = t,\ 7c - b + 2a = 0,\ 7d - c + 2b = 0.$$

On vérifie la première en prenant $a = 5$, $t = \pm 37$; les autres donnent ensuite $b = 3$, $c = -1$, $d = -1$. On obtient ainsi la forme cubique $(5, 3, -1 -1)$ dont le covariant quadratique est la forme $(14, 1, 4)$: et par le changement de signe de la deuxième indéterminée on en déduit la forme $(5, -3, -1, 1)$ qui correspond au covariant $(14, -1, 4)$. Donc

Le déterminant -220 *présente trois classes de formes cubiques représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -52),\quad (5, 3, -1, -1),\quad (5, -3, -1, 1);$$

le déterminant -55 *n'en donne qu'une seule, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -13)$.

75. $\Delta = -63$. Les formes quadratiques proprement primitives du déterminant -63 sont distribuées en quatre classes rangées dans la période suivante :

$$L = (11, 5, 8),\ L^2 = (7, 0, 9),\ L^3 = (11, -5, 8),\ L^4 = 1.$$

On voit immédiatement que les deux classes $(11, \pm 5, 8)$ s'obtiennent par la triplication l'une de l'autre. Comme elles représentent proprement le nombre 8, on peut résoudre l'équation

$$8.11^3 = t^2 + 63a^2.$$

On la vérifie effectivement en prenant $a = 13$, $t = \pm 1$. Puis en faisant $A = 11$, $B = 5$, $C = 2$ dans les formules I, on en déduit la forme cubique $(13, 3, -1, -1)$ dont le covariant quadratique est la forme $(22, 5, 4)$. En changeant le signe de la seconde indéterminée, on obtient la forme $(13, -3, -1, 1)$ qui correspond au covariant $(22, -5, 4)$.

L'Ordre quadratique proprement primitif du déterminant -63 ne présente qu'une seule classe qui corresponde à des formes cubiques, savoir la classe principale; car aucune autre classe ne donne par triplication la classe principale. Pour la même raison la classe $(2, 1, 32)$ est la seule classe improprement primitive du déterminant -63 qui corresponde à des formes cubiques du même détesminant. Ces deux classes correspondent respectivement aux deux classes cubiques $(0, 1, 2, -60)$, $(0, 1, 1, -15)$.

On peut demander si les deux ordres dérivés $(3. 1)$, $(6, 2)$ représentés

par les deux formes (3, 3, 24), (6, 3, 12) correspondent à des formes cubiques. Pour cela, d'après les theorèmes VI, VIII, X (nos 17, 19, 21), il faudrait que l'on pût résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'une des trois équations :

$$3 = t^2 + 7u^2. \quad 12 = t^2 + 7u^2, \quad 24 = t^2 + 7u^2,$$

lesquelles sont évidemment impossibles, puisque -7 est non-résidu quadratique de 3. Par conséquent

Toutes les formes cubiques du déterminant -252 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -60), \ (13, 3, -1, -1), \ (13, -3, -1, 1);$$

celles du déterminant -63 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 1, -15)$.

76- $\Delta = -71$ Ce déterminant présente sept classes de formes quadratiques proprement primitives, rangées dans une période unique

$$L = (3, 1, 24), \quad L^2 = (9, 1, 8), \quad L^3 = (5, 3, 16),$$

$$L^4 = (5, -3, 16), \quad L^5 = (9, -1, 8), \quad L^6 = (3, -1, 24), \quad L^7 = 1.$$

Les deux classes L^2, L^5 auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, s'obtiennent par la triplication des deux classes L^3, L^4. Par conséquent les deux classes improprement primitives $(10, \pm 3, 8)$ correspondent à des formes cubiques. En faisant dans les formules I, $A = 5$, $B = 3$, $C = 4$ on obtient les suivantes

$$8.125 = t^2 + 71u^2, \quad 10b - 3a = t, \quad 5c - 3b + 4a = 0, \quad 5d - 3c + 4b = 0,$$

d'où l'on déduit la forme $(3, -1, -3, -1)$ dont le covariant quadratique est $(10, 3, 7)$. Par conséquent la forme cubique $(3, 1, -3, 1)$ correspond au covariant $(10, -3, 8)$.

Comme aucune classe différente de la classe principale ne produit par triplication cette dernière classe, la classe $(1, 1, 72)$ est la seule classe proprement primitive du déterminant donné qui corresponde à des classes cubiques. Pour la même raison la classe $(2, 1, 36)$ est la seule classe improprrment primitive qui corresponde à des formes cubiques du déterminant

-71. Ces deux classes correspondent respectivement aux deux classes cubiques $(0, 1, 2, -68)$, $(0, 1, 1, -17)$. Donc

Toutes les formes cubiques du déterminant -71 *sont renfermées dans une classe unique* $(0, 1, 1, -17)$; *celles du déterminant quadruple* -284 *sont distribuées dans les trois classes* $(0, 1, 2, -68)$, $(3, -1, -3, -1)$, $(3, 1, -3, 1)$.

77. $\Delta = -79$. La période

$$L = (5, 1, 16),\ L^2 = (11, 3, 8),\ L^3 = (11, -3, 8),\ L^4 = (5, -1, 16),\ L^5 = 1,$$

renferme toutes les classes proprement primitives du déterminant -79. La seule de ces classes qui corresponde à des formes cubiques est la classe principale, parce qu'aucune autre classe ne produit par triplication la classe principale. Pour la même raison, la classe $(2, 1, 40)$ est la seule qui corresponde à des formes cubiques du déterminant -79. Mais comme les deux classes auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, s'obtiennent par la triplication des deux classes $(5, \pm 1, 16)$, les deux classes $(10, \pm 1, 8)$ correspondent à des formes cubiques du déterminant -4.79. La classe cubique à laquelle correspond la classe $(10, 1, 8)$ s'obtient au moyen des formules

$$8.125 = t^2 + 79a^2, \quad 10b - a = t,$$

$$5c - b + 4a = 0, \quad 5d - c + 4b = 0.$$

On vérifie la première équation en prenant $a = 3$, $t = \pm 17$. Les autres formules donnent ensuite $b = 2$, $c = -2$, $d = -2$. Donc

Le déterminant -316 *présente trois classes cubiques, représentées par les trois formes* $(0, 1, 2, -76)$, $(3, 2, -2, -2)$, $(3, -2, -2, 2)$; *le déterminant* -79 *n'en offre qu'une seule, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -19)$.

78. $\Delta = -87$. L'ordre quadratique proprement primitif du déterminant -87 se compose de six classes rangées dans une seule période:

$$L = (11, 1, 8), \quad L^2 = (7, -2, 13), \quad L^3 = (3, 0, 29),$$

$$L^4 = (7, 2, 13), \quad L^5 = (11, -1, 8), \quad L^6 = (1, 1, 88).$$

Les deux classes L, L^5 auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8 ne peuvent pas s'obtenir par triplication; par conséquent les seules

classes proprement primitives dont la triplication donne la classe principale peuvent correspondre à des formes cubiques du déterminant $-87.4=-348$; ces classes sont L^2, L^4 et L^6, c'est-à-dire la classe principale (1, 1, 88) et les deux classes, (7, ± 5, 16). La classe cubique à laquelle correspond la classe quadratique (7, 5, 16) s'obtient à l'aide des formules

$$7^3=t^2+87a^2,\quad 7b-5a=t,\quad 7c-10b+16a=0,\quad 7d-10c+16b=0.$$

On résout la première en prenant $a=1$, $t=\pm 16$; les autres donnent ensuite $b=3$, $c=2$, $d=-4$. Donc

Les classes cubiques du déterminant − 348 *sont au nombre de trois, représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -84),\ (1, 3, 2, -4),\ (1, -3, 2, 4).$$

En appliquant la règle du n° 70 on déduit de ces formes celles qui représentent les classes cubiques du déterminant − 87 qui correspondent aux trois classes improprement primitives (2, 1, 44), (14, ± 5, 8). Comme ces trois classes sont les seules qu'on obtienne en composant la classe (2, 1, 44) avec les classes dont la triplication donne la classe principale, elles sont aussi les seules qui correspondent à des formes cubiqoes du déterminant − 87. Donc

Les formes cubiques du déterminant − 87 *sont renfermées dans trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 1, -21),\ (2, 3, 1, -1),\ (2, -3, 1, 1).$$

Remarque. Pour déduire ainsi la classifieation des formes cubiques du determinant Δ de celle qui se rapporte au déterminant 4Δ, il faut avoir soin de représenter les classes quadratiques auxquelles correspondent les classes cubiques du déterminant 4Δ, par des formes dont le coefficient moyen soit impair. Ainsi dans le cas actuel, si nous avions remplacé les deux formes (7, ± 5, 16) par les deux formes réduites (7, ± 2, 13) nous aurions obtenu les deux formes cubiques (1, − 2, − 3, 2), (1, 2, − 3, − 2) pour représenter les classes cubiques cherchées. Le troisième coefficient étant impair, il serait impossible d'appliquer la règle du n° 70.

79. $\Delta=-95$. Les formes quadratiques proprement primitives du déterminant − 95, sont distribuées en huit classes et ces huit classes sont renfermées dans une période unique:

$$L = (3,\ 1,\ 32),\quad L^2 = (9,\ -2,\ 11),\quad L^3 = (8,\ 3,\ 13),\quad L^4 = (8,\ 0,\ 19),$$

$$L^5 = (8,\ -3,\ 13),\quad L^6 = (9,\ 2,\ 14),\quad L^7 = (3,\ -1,\ 32),\quad L^8 = (1,\ 0,\ 95).$$

Le degré 8 de cette période étant premier avec 3, chacune de ces classes s'obtient par triplication, et d'une seule manière. La classe principale (1, 1, 96) est donc la seule de ces classes qui corresponde à des formes cubiques. De même la classe (2, 1, 48) est la seule qui corresponde à des formes cubiques du déterminant -95. Ces deux classes correspondent respectivement aux deux classes cubiques $(0, 1, 2, -92)$, $(0, 1, 1, -46)$. Les deux classes $(8, \pm 3, 13)$ auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8 s'obtiennent par la triplication des deux classes $(3, \pm 1, 32)$. On peut donc résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'équation

$$8.27 = t^2 + 95a^2.$$

On la vérifie effectivement en prenant $a = 1$, $t = \pm 11$. Au moyen de cette solution et des formules I on obtient les deux formes cubiques

$$(1, 2, -2, -6),\quad (1, -2, -2, 6)$$

dont les covariants quadratiques sont les formes improprement primitives $(6, 1, 16)$, $(6, -1, 16)$. Par conséquent

Les formes cubiques du déterminant -380 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -92),\ (1, 2, -2, -6),\ (1, -2, -2, 6);$$

celles du déterminant -95 *forment une classe unique, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -23)$.

80. Jusqu'ici nous avons pris pour valeurs de $-\Delta$ tous les nombres compris dans la formule $8l+7$. Dans ce qui va suivre nous nous bornerons aux nombres premiers de la forme indiquée compris entre 100 et 300. Lorsque le nombre des classes primitives est premier avec 3, aucune classe ne produit par triplication la classe principale, si ce n'est cette classe principale elle-même. Dans ce cas les formes comprises dans la classe cubique $(0, 1, 2, 3+\Delta)$ sont les seules formes cubiques du déterminant 4Δ dont les covariants soient des formes proprement primitives; et la classe $\left(0, 1, 1, \frac{3+\Delta}{4}\right)$ comprend toutes les formes

cubiques du déterminant Δ. Dans le même cas les deux classes $\left(8, \pm \tau, \frac{\tau^2 - \Delta}{8}\right)$ s'obtiennent par triplication, de sorte que la classification des formes quadratiques proprement primitives du déterminant Δ suffit pour déterminer les deux classes $(2A, B, 2C)$ de l'ordre improprement primitif, qui correspondent à deux classes cubiques du déterminant 4Δ; ces deux classes sont représentées par les deux formes $\left(4, \pm \tau, \frac{\tau^2 - \Delta}{4}\right)$.

Soit $\Delta = -103$. Ce déterminant présente cinq classes proprement primitives renfermées dans la période suivante:

$$E = (7, 3, 16), \quad E^2 = (8, -1, 13), \quad E^3 = (8, 1, 13),$$
$$E^4 = (7, -3, 16), \quad E^5 = (1, 1, 104).$$

Les classes $(8, \pm 1, 13)$ s'obtenant par la triplication des deux classes $(7, \pm 3, 16)$, les deux classes $(14, \pm 3, 8)$ correspondent â des classes cubiques que l'on détermine au moyen des formules I:

$$8.7^3 = t^2 + 103a^2, \quad 14b - 3a = t,$$
$$7c - 3b + 4a = 0, \quad 7d - 3c + 4b = 0;$$
$$a = 5, \ t = \pm 13, \ b = 2, \ c = -2, \ d = -2.$$

Les formes cubiques du déterminant -412 *sont renfermées dans trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -100), \ (5, 2, -2, -2), \ (5, -2, -2, 2);$$

celles du déterminant -103 *forment une classe unique, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -25)$.

Soit $\Delta = -127$. L'ordre proprement primitif est compris dans la période

$$L = (11, 7, 16), \quad L^2 = (8, -3, 17), \quad L^3 = (8, 3, 17),$$
$$L^4 = (11, -7, 15), \quad L^5 = (1, 1, 128).$$

Les deux classes $(8, \pm 3, 17)$ s'obtiennent par la triplication des deux classes $(11, \pm 7, 16)$. On peut donc résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'équation

$$8.11^3 = t^2 + 127a^2$$

On la vérifie effectivement en prenant $a = 9$, $t = \pm 19$. Au moyen de cette solution et des formules I, on obtient les deux formes

$$(9, 2, -2, -2), \quad (9, -2, -2, 2)$$

qui ont respectivement pour covariants les deux formes $(22, \pm 7, 8)$.

Les formes cubiques du déterminant -508 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -124), \ (9, 2, -2, -2), \ (9, -2, -2, 2);$$

celles du déterminant -127 *sont renfermées dans une classe unique, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -31)$.

81. $\Delta = -151$. L'ordre quadratique proprement primitif du déterminant -151 se compose des sept classes

$$E = (5, 3, 32), \quad E^2 = (8, -1, 19), \quad E^3 = (11, -5, 16), \quad E^4 = (11, 5, 16),$$

$$E^5 = (8, 1, 19), \quad E^6 = (5, -3, 32), \quad E^7 = (1, 1, 152).$$

L'indice ϖ de la classe qui produit par triplication la classe $E^5 = (8, 1, 19)$ est la racine de la congruence

$$3\varpi \equiv 5 \pmod{7},$$

c'est-à-dire $\varpi = 4$. Par conséquent les deux classes $(8, \pm 1, 19)$ proviennent de la triplication des deux classes $(11, \pm 5, 16)$. Par conséquent les classes improprement primitives qui correspondent à des formes cubiques du déterminant -4.151, sont les deux classes $(22, \pm 5, 8)$. La classe cubique à laquelle correspond la classe $(22, 5, 8)$ s'obtient au moyen des formules I

$$8.11^3 = t^2 + 151a^2, \quad 22b - 5a = t,$$

$$11c - 5b + 4a = 0, \quad 11d - 5c + 4b = 0.$$

On résout la première au moyen des valeurs $a = 7$, $t = \pm 57$. Les autres formules donnent ensuite $b = -1$, $c = -3$, $d = -1$. Donc

Les formes cubiques du déterminant -604 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -148), \ (7, -1, -3, -1), \ (7, 1, -3, 1);$$

celles du déterminant -151 *sont renfermées dans une même classe, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -37)$.

82. $\Delta = -167$. Les formes quadratiques du déterminant -167 sont distribuées en 11 classes formant une période unique:

$$E = (3, 1, 56) \quad E^2 = (9, 7, 24), \quad E^3 = (8, 1, 21), \quad E^4 = (7, -1, 24),$$

$$E^5 = (11, -3, 16) \quad E^6 = (11, 3, 16) \quad E^7 = (7, 1, 24), \quad E^8 = (8, -1, 21),$$

$$E^9 = (9, -7, 24), \quad E^{10} = (3, -1, 56), \quad E^{11} = (1, 1, 168).$$

On voit par ce tableau que les deux classes $(8, \pm 1, 21)$ s'obtiennent par la triplication des deux classes $(3, \pm 1, 56)$. Par conséquent les deux classes improprement primitives $(6, \pm 1, 28)$ correspondent à deux classes cubiques du déterminant -4.167. Les formules I donnent, pour déterminer la classe cubique à laquelle correspond la classe $(6, 1, 28)$, les équations suivantes:

$$8.27 = t^2 + 157a^2, \quad 6b - a = t,$$

$$3c - b + 14a = 0, \quad 3d - c + 14b = 0.$$

On résout la première en prenant $c = 1$, $t = \pm 7$; puis, à l'aide des formules suivantes, on obtient la forme cubique $(1, -1, -5.3)$. Donc

Les formes cubiques du déterminant -628 *se distribuent en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -164), \quad (1, -1, -5, 3), \quad (1, 1, -5, -3);$$

celles du déterminant -167 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 1. -41)$.

83. $\Delta = -191$. Les classes quadratiques proprement primitives du déterminant -191 sont au nombre de 13 renfermées dans une seule période

$$E = (3, 1, 64), \quad E^2 = (9, -5, 24), \quad E^3 = (8, -3, 25), \quad E^4 = (13, 11, 24),$$

$$E^5 = (5, -3, 40), \quad E^6 = (15, 7, 16), \quad E^7 = (15, -7, 16), \quad E^8 = (5, 3, 40),$$

$$E^9 = (13, -11, 24), \quad E^{10} = (8, 3, 25), \quad E^{11} = (9, 5, 24), \quad E^{12} = (3, -1, 64), \quad E^{13} = 1.$$

Il résnlte de ce tableau que les deux classes $(8, \pm 3, 25)$, auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, s'obtiennent par la triplication

des deux classes $(2, \pm 1, 64)$. Par conséquent les classes improprement primitives qui correspondent à des formes cubiques du déterminant -4.191, sont les deux classes $(6, \pm 1, 32)$. En faisant $A = 3$, $B = 1$, $C = 16$ dans les formules I, on obtient les équations

$$8.27 = t^2 + 191.a^2, \quad 6b - a = t, \quad 3c - b + 16a = 0, \quad 3d - c + 16b = 0,$$

à l'aide desquelles on détermine la classe cubique $(1, 1, -5, -7)$ qui correspond à la classe quadratique $(6, 1, 32)$. Donc

Les classes cubiques du déterminant -764 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(1, 1, -5, -7), \quad (1, -1, -5, 7), \quad (0, 1, 2, -188);$$

celles du déterminant -191 *sont comprises dans une classe unique, représentée par la forme* $(0, 1, 1, -47)$.

84. $\Delta = -199$. Les neuf classes en lesquelles se distribuent les formes quadratiques proprement primitives du déterminant -199 sont renfermées dans une seule période:

$$E = (5, 1, 40), \quad E^2 = (25, 1, 8), \quad E^3 = (7, 2, 29), \quad E^4 = (13, -3, 16),$$

$$E^5 = (13, 3, 16), \quad E^6 = (7, -2, 29), \quad E^7 = (25, -1, 8), \quad E^8 = (5, 1, 40), \quad E^9 = 1.$$

Comme les deux classes E^2. E^7 auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, ne s'obtiennent pas par triplication, aucune classe improprement primitive ne correspond à des formes cubiques du déterminant -4.199. La classe principale s'obtient par la triplication des trois classes E^3, E^6, E^9; par conséquent chacune de ces trois classes correspond à des formes cubiques du déterminant -4.199, et aucune autre classe proprement primitive du déterminant -199 ne correspond à des formes cubiques. En composant ces trois classes avec la classe $(2, 1, 100)$ on obtient les trois classes $(14, \pm 5, 16)$ $(2, 1, 100)$, et ces trois classes sont les seules de l'ordre improprement primitif qui correspondent à des formes cubiques du déterminant -199.

En faisant $A = 7$, $B = 5$, $C = 8$ dans les formules II, on obtient les équations

$$7^3 = t^2 + 199a^2,\ 7b - 5a = t,$$

$$7c - 10b + 32a = 0,\ 7d - 10c + 32b = 0.$$

au moyen desquelles on trouve la classe cubique (1, − 1, − 6, − 4) qui correspond à la classe (7, 5, 32). Par l'application de la règle du n.° 76, on en déduit la classe (2, − 1, − 3, − 1) à laquelle correspond la classe (14, 5, 16).

Toutes les formes cubiques du déterminant − 796 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(1, -1, -6, 4),\quad (1, 1, -6, 4)\quad (0, 1, 2, -196);$$

celles du déterminant − 199 *sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes*

$$(2, -1, -5, -1),\quad (2, 1, -3, 1),\quad (0, 1, 1, -49).$$

85. Nous rapprocherons du déterminant − 199 le déterminant − 239 qui présente aussi un nombre de classes quadratiques multiple de 3. Les classes proprement primitives sont au nombre de 15 renfermées dans la période suivante:

$$E = (5, 1, 48),\quad E^2 = (11, 5. 24),\quad E^3 = (9, -7, 32),\quad E^4 = (8, -3, 31),$$

$$E^5 = (15, -11, 24),\ E^6 = (3, 1, 80),\quad E^7 = (14, 1, 16),\quad E^8 = (15, -1, 16),$$

$$E^9 = (3, -1, 90),\quad E^{10} = (15, 11, 24),\quad E^{11} = (8, 3, 31),\quad \ldots\ldots$$

Comme les indices 4, 11 des deux classes (8, ± 3, 31) auxquelles appartiennent les représentations du nombre 8, sont premiers avec 3, ces deux classes ne peuvent pas s'obtenir par triplication; par conséquent aucune classe quadratique improprement primitive du déterminant − 239 ne correspond à des formes cubiques du déterminant quadruple − 4.239. Toutes les formes cubiques de ce dernier déterminant sont renfermées dans les trois classes qui correspondent aux trois classes quadratiques (15, ± 11, 24), (1, 1, 240) dont la triplication produit la classe principale. Ces trois classes cubiques sont représentées par les trois formes

$$(1, -1, -6, -4),\quad (1, 1, -6, 4),\quad (0, 1, 2, -226),$$

d'où, par l'application de la règle du n.° 70, on déduit les trois formes

$$(2, -1, -3, -1), \quad (2, 1, -3, 1), \quad (0, 1, 1, -59)$$

par lesquelles sont représentées les trois classes cubiques du déterminant -239. Donc

Les formes cubiques du déterminant -956 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(1, -1, -6, -1), \quad (1, 1, -6, 1), \quad (0, 1, 2, -236);$$

celles du déterminant -239 *sont renfermées dans les trois classes*

$$(2, -1, -3, -1), \quad (2, 1, -3, 1), \quad (0, 1, 1, -59).$$

86. Pour les trois valeurs de Δ qui nous restent à examiner, savoir -223, -263, -271, le nombre des classes quadratiques est premier avec 3. C'est pourquoi, comme nous l'avons remarqué plus haut (nº 80), la classe principale est la seule classe proprement primitive qui corresponde à des formes cubiques. De même la classe $\left(2, 1, \frac{1-\Delta}{2}\right)$ est la seule classe improprement primitive qui corresponde à des formes cubiques du déterminant Δ. Ces deux classes correspondent respectivement aux deux classes $(0, 1, 2, 3+\Delta)$, $\left(0, 1, 1, \frac{3+\Delta}{4}\right)$, dont la dernière renferme toutes les formes cubiques du déterminant Δ. Les formes cubiques du déterminant 4Δ sont renfermées dans la classe $(0, 1, 2, 3+\Delta)$ et dans les deux classes auxquelles correspondent les deux classes improprement primitives que l'on obtient en composant la classe $\left(2, 1, \frac{1-\Delta}{2}\right)$ avec les deux classes dont la triplication donne les deux classes $\left(8, \pm\tau, \frac{\tau^2-\Delta}{8}\right)$. Ces deux classes cubiques se déterminent au moyen des formules I (nº 63).

Nous donnerons successivement les calculs nécessaires pour la classification relative à chacune des valeurs de Δ, sans autre explication que celle qui précède.

$\Delta = -223.\quad E = (7, 1, 32),\quad E^2 = (8, -3, 29),\quad E^3 = (17, -7, 16),$

$E^4 = (17, 7, 16),\quad E^5 = (8, 3, 29),\quad E^6 = (7, -1, 32),\quad E^7 = 1.$

$8.17^3 = (111)^2 + 223\,(11)^2,\quad a = 11,\quad b = -1,\quad c = -3,\quad d = -1.$

Les formes cubiques du déterminant -4.223 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 2,\ -220),\quad (11,\ -1,\ -3\ -1),\quad (11,\ 1,\ -3,\ 1);$$

celles du déterminant -223 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0,\ 1,\ 1,\ -55)$.

$\Delta = -263.$ $E = (3,\ 1,\ 88)$, $E^2 = (9,\ -5,\ 32)$, $E^3 = (17,\ -3,\ 16)$,

$E^4 = (13,\ 7,\ 24)$, $E^5 = (8,\ 1,\ 33)$, $E^6 = (11,\ -1,\ 24)$,

$E^7 = (11,\ 1,\ 24)$, $E^8 = (8,\ -1,\ 33)$, $\ldots\ E^{13} = 1$.

$$8.11^3 = (91)^2 + 263.3^2,\ a = 3,\ b = -4,\ c = -2,\ d = 2.$$

Les formes cubiques du déterminant -4.263 *sont renfermées dans les trois classes*

$$(3,\ -1,\ -2,\ 2),\quad (3,\ 1,\ -2,\ -2),\quad (0,\ 1,\ 1,\ -260);$$

celles du déterminant -263 *forment une classe unique, représentée par la forme* $(0,\ 1,\ 1,\ -65)$.

$\Delta = -271.$ $E = (5,\ 3,\ 56)$, $E^2 = (11,\ -9,\ 32)$, $E^3 = (8,\ 3,\ 35)$,

$E^4 = (7,\ -3,\ 40)$ $E^5 = (17,\ -1,\ 16)$, $E^6 = (17,\ 1,\ 16)$,

$E^7 = (7,\ 3,\ 40)$, $E^8 = (8,\ -3,\ 35)$, $\ldots\ E^{11} = 1$.

$$8.5^3 = (27)^2 + 371.1^2,\ a = 1,\ b = 3,\ c = -1,\ d = -9.$$

Les formes cubiques du déterminant -4.271 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(1,\ 3,\ -1,\ -9),\quad (1,\ -3,\ -1,\ 9),\quad (0,\ 1,\ 2,\ -268);$$

celles du déterminant -271 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0,\ 1,\ 1,\ -67)$,

$$\Delta = 8l + 5.\ D = 4\Delta \text{ et } D = \Delta.$$

87. Lorsque Δ est de la forme $8l+5$ et que les classes quadratiques du genre principal du déterminant Δ sont renfermées dans une même période, la classification des formes cubiques du déterminant 4Δ est très-facile. D'abord l'équation

$$8.P^3 = t^2 - \Delta u^2$$

étant impossible en nombres entiers impairs t, u, aucune forme improprement primitive $(2P, Q, 2R)$ du déterminant Δ ne peut correspondre à une forme cubique du déterminant 4Δ (n° 65). Les formes cubiques de ce déterminant ont leurs covariants quadratiques renfermés dans les classes dont la triplication donne la classe principale. Or, si le déterminant Δ est régulier, les classes quadratiques dont la triplication produit la classe principale sont représentées par les formules générales

$$\text{(A)} \qquad \left(4, 1, \frac{1-\Delta}{4}\right), \quad \left(4, -1, \frac{1-\Delta}{4}\right), \quad (1, 1, 1-\Delta).$$

En effet, nous avons démontré dans notre Mémoire *sur la classification des formes quadratiques* (n° 9) que pour tout déterminant négatif, compris dans la formule $-(8l+3)$, autre que -3, les trois formes précédentes représentent trois classes distinctes. Nous avons démontré dans le même n° que les deux formes

$$K' = \left(4, 1, \frac{1-\Delta}{4}\right), \quad K'' = \left(4, -1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$$

s'obtiennent par la duplication l'une de l'autre. Il résulte de là que leur triplication donne la classe principale.

Si le déterminant Δ est régulier, ces trois classes sont les seules dont la triplication donne la classe principale. Car si l'on désigne par ϖ l'indice d'une classe dont la triplication produit la classe principale et par 3λ le nombre des classes du genre principal, le nombre ϖ est déterminé par la congruence

$$3\varpi \equiv 0 \pmod{3\lambda},$$

laquelle n'admet que trois racines, $\varpi = 0$, $\varpi = \lambda$, $\varpi = 2\lambda$. Par conséquent les trois classes (A) sont les seules dont la triplication produise la classe principale; ce sont aussi les seules classes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques du déterminant 4Δ.

88. Or les classes cubiques auxquelles correspondent les trois classes (A) peuvent être représentées par des formules générales. D'abord nous avons rappelé ici-même (n° 66) que la classe principale $(1, 1, 1-\Delta)$ correspond à une classe unique, représentée par la forme $(0, 1, 2, 3+\Delta)$, et que toute

classe quadratique d'un déterminant négatif, autre que -1, dont la triplication donne la classe principale, correspond à une classe cubique, et à une seule. Or la classe cubique à laquelle correspond la classe quadratique $\left(4, 1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$ est représentée par la formule générale $\left(0, 2, 1, \frac{3+\Delta}{8}\right)$. En effet, si dans les formules

$$A = b^2 - ac, \quad B = bc - ad, \quad C = c^2 - bd,$$

on prend $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$, $d = \frac{3+\Delta}{8}$, on obtient $A = 4$, $B = 2$, $C = \frac{1-\Delta}{4}$.
En changeant x en $-x$, on obtient la forme cubique $\left(0, 2, -1, \frac{3+\Delta}{8}\right)$, dont le covariant quadratique est la forme $\left(4, -1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$.

Si le déterminant $\Delta = -(8l+3)$ est régulier et inférieur à -3, les formes cubiques du déterminant quadruple 4Δ sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes

$$\text{(B).} \qquad (0, 1, 2, 3+\Delta), \left(0, 2, 1, \frac{3+\Delta}{8}\right), \left(0, 2, -1, \frac{3+\Delta}{8}\right).$$

Dans ce théorème nous supposons Δ sans diviseur carré. Si Δ renfermait des facteurs multiples, les formes cubiques du déterminant 4Δ, dont les covariants appartiennent à l'ordre primitif, seraient encore renfermées dans les trois classes (B), pourvû que le déterminant Δ fût régulier; mais la classification serait incomplète; il resterait à déterminer les classes cubiques qui peuvent correspondre aux ordres dérivés du déterminant Δ.

De même, lorsque le déterminant Δ est irrégulier, les trois formules (B) représentent trois classes cubiques du déterminant 4Δ; mais pour compléter la classification, il reste à déterminer les classes cubiques qui correspondent aux classes proprement primitives, différentes des deux classes $\left(4, \pm 1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$ et dont la triplication donne la classe principale. Dans tous les autres cas, la classification des formes cubiques du déterminant 4Δ est exprimée d'une manière complète par le théorème précédent.

89. Au dessous de 1000 il n'y a que sept nombres de la forme $8l+3$ qui, étant changés de signe, soient des déterminants irréguliers; ce sont les nombres 243, 307, 339, 459, 677, 755, 891. Pour tous ces nombres l'expo-

sant d'irrégularité est égal à 3; mais les trois nombres 307, 339, 755 sont les seuls de ces nombres qui n'aient pas de facteurs multiples; les autres sont tous divisibles par 9. Si donc le déterminant Δ changé de signe est un nombre de la forme $8l + 3$, sans diviseur carré et inférieur à 1000, excepté 307, 339, et 755, la classification des formes cubiques du déterminant 4Δ est exprimée par le théorème précédent. Tels sont les nombres

11, 19, 35, 43, 51, 59, 67, 83, 91, 107, 115, 123,

131, 139, 147, 155, 163, 179, 187, 195, 203, 211, 219,

227, 235, 259, 267, 282, 291, 299, etc..

En substituant ces valeurs de $-\Delta$ dans les formules (B), on obtient immédiatement les théorèmes suivants:

Les formes cubiques du déterminant -44 *sont renfermées dans trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 2, 1, -1), \quad (0, 2, -1, -1), \quad (0, 1, 2, -8).$$

Les formes cubiques du déterminant -76, *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 2, 1, -2), \quad (0, 2, -1, -2), \quad (0, 1, 2, -16).$$

Ler formes cubiques du déterminant -140 *sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 2. 1, -4), \quad (0, 2, -1, -4), \quad (0, 1, 2, -32).$$

Les formes cubiques du déterminant -172 *se distribuent en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 2, 1, -5), \quad (0, 2, -1, -5), \quad (0, 1, 2, -40).$$

Sans multiplier d'avantage ces exemples, nous nous occuperons des trois déterminants irréguliers -307, -339 et -755.

90. $\Delta = -307$. Les formes quadratiques proprement primitives du déterminant -307 sont distribuées en neuf classes représentées par les neuf formes

$$(1, 1, 308), \ (4, \pm 1, 77), \ (7, \pm 1, 44), \ (11, \pm 1, 28), \ (17, \pm 4, 19).$$

Lorsqu'on prend successivement pour bases les huit dernières classes, on obtient des périodes de trois termes. Par conséquent chacune de ces neuf classes produit par triplication la classe principale; chacune aussi correspond à une classe cubique du déterminant quadruple -4.307. Les formules (B) donnent immédiatement les classes cubiques auxquelles correspondent les trois classes $(1, 1, 308)$, $(4, \pm 1, 77)$ savoir

$$(0, 1, 2, -304), \quad (0, 2, 1, -38), \quad (0, 2, -1, -38).$$

Les six classes cubiques qui correspondent aux six autres classes quadratiques se déterminent au moyen des formules (III) du n° 65. Pour les deux classes $(7, 1, 45)$, $(11, 1. 28)$ on doit résoudre les deux équations

$$7^3 = t^2 + 307a^2, \qquad 11^3 = t^2 + 307a^2.$$

On en déduit respectivement

$$a^2 < \frac{343}{307} < 2, \qquad a^2 < \frac{1331}{307} < 5;$$

et comme la congruence relative au module 4 exige que le nombre a soit impair, on doit prendre $a = 1$. On trouve ensuite $t = \pm 6$ pour la première équation et $t = \pm 32$, pour la deuxième. Au moyen de ces solutions et des formules III on obtient les deux formes cubiques

$$(1, 1, -6, -8), \quad (1, 3, -2, -8),$$

dont les covariants quadratiques sont effectivement les deux formes

$$(7, 1, 44), \quad (11, 1, 28).$$

La classe cubique qui correspond à la classe $(17, 4, 19)$ se détermine au moyen des formules

$$17^3 = t^2 + 807a^2, \qquad 17b - 4a = t,$$

$$17c - 8b + 19a = 0, \qquad 17d - 8c + 19b = 0.$$

On résout la première en prenant $a = 4$, $t = \pm 1$, et l'on déduit des suivantes $b = -3$, $c = -4$, $d = -3$. Enfin par la substitution $x = x'$, $y = -y'$,

on déduit des trois formes obtenues celles dont les covariants quadratiques sont les trois formes $(7, -1, 44)$, $(11, -1, 28)$, $(17, -4, 19)$.

Toutes les formes cubiques du déterminant -4.307 *sont distribuées en neuf classes, représentées par les neuf formes*

$$(0,\ 1,\ 2,\ -304),\quad (0,\ 2,\ 1,\ -38),\quad (0,\ 2,\ -1,\ -38),$$

$$(1,\ 1,\ -6,\ -8),\quad (1,\ -1,\ -6,\ 8),\quad (1,\ 3,\ -2,\ -8),$$

$$(1,\ -3,\ -2,\ 8),\quad (4,\ 1,\ -4,\ -3),\quad (4,\ -1,\ -4,\ 3).$$

91. $\Delta = -339$. Le genre principal du déterminant -339 se compose de neuf classes représentées par les neuf formes

$$(1,\ 1,\ 340),\quad (4,\ \pm 1,\ 85),\quad (7,\ \pm 2,\ 49),\quad (13,\ \pm 5,\ 28),\quad (16,\ \pm 6,\ 25).$$

Ces neuf classes correspondent a autant de classes cubiques, car elles produisent toutes la classe principale par triplication. Les classes cubiques auxquelles correspondent les trois classes $(1, 1, 340)$, $(4, \pm 1, 85)$ sont représentées par les trois formes (n.° 88)

$$(0,\ 2,\ 1,\ -42),\quad (0,\ 2,\ -1,\ -42),\quad (0,\ 1,\ 2,\ -336).$$

La détermination des autres classes cubiques exige la résolution des trois équations

$$7^3 = t^2 + 389a^2,\quad 13^3 = t^2 + 339a^2,\quad 15^3 = t^2 + 339a^2.$$

On les vérifie en prenant respectivement : $a = 1$, $t = \pm 2$; $a = 2$, $t = \pm 29$; $a = 3$, $t = \pm 18$. Au moyen de ces solutions et des formules III du n. 65 on obtient les trois formes cubiques

$$(1,\ 0,\ -7,\ -4),\quad (2,\ 3,\ =2,\ -3),\quad (3,\ 0,\ -5,\ -4),$$

dont les covariants quadratiques sont les trois formes

$$(7,\ 2,\ 49),\quad (13,\ 5,\ 28),\quad (15,\ 6,\ 25).$$

La transformation impropre $x = x'$, $y = -y'$ donne ensuite les trois formes cubiques auxquelles correspondent les formes opposées aux trois précédentes. Donc

Les formes cubiques du déterminant -4.339 *se distribuent en neuf classes représentées par les neuf formes suivantes :*

$$(0,\ 1,\ 2,\ -336),\quad (0,\ 2,\ 1,\ -42),\quad (0,\ 2,\ -1,\ -42),$$

$$(1,\ 0,\ -7,\ -4),\quad (2,\ 3,\ -2,\ -8),\quad (3,\ 0,\ -5,\ -4),$$

$$(1,\ 0,\ -7,\ 4),\quad (2,\ -3,\ -2,\ 8),\quad (3,\ 0,\ -5,\ 4).$$

92. $\Delta = -755$. Le genre quadratique principal du déterminant -755 se compose de 18 classes renfermées dans les quatre périodes suivantes :

$$H = (9,\ 1,\ 84),\quad H^2 = (19,\ -9,\ 44),\quad H^3 = (5,\ 0,\ 151),$$

$$H^4 = (19,\ 9,\ 44),\quad H^5 = (9,\ -1,\ 84),\quad H^6 = (1,\ 0,\ 755);$$

$$K = (20,\ 5,\ 39),\quad K^2 = (4,\ -1,\ 189),\quad K^3 = (5,\ 0,\ 151),$$

$$K^4 = (4,\ 1,\ 189),\quad K^5 = (20\ -5,\ 39),\quad K^6 = (1,\ 0,\ 755);$$

$$L = (21,\ 1,\ 36),\quad L^2 = (11,\ 2,\ 69),\quad L^3 = (5,\ 0,\ 151),$$

$$L^4 = (11,\ -2,\ 69),\quad L^5 = (21,\ -1,\ 36),\quad L^6 = (1,\ 0,\ 755);$$

$$M = (29,\ 12,\ 31),\quad M^2 = (21,\ 8,\ 39),\quad M^3 = (5,\ 0,\ 151),$$

$$M^4 = (21,\ -8,\ 39),\quad M^5 = (29,\ -12,\ 31),\quad M^6 = (1,\ 0,\ 755).$$

Celles de ces classes dont la triplication produit la classe principale sont celles qui correspondent aux indices pairs 2, 4 ou 6, savoir la classe principale elle-même et les huit classes représentées par les formes suivantes :

$$(4,\ \pm 1,\ 189),\quad (19,\ \pm 9,\ 44),\quad (11,\ \pm 2,\ 69),\quad (21,\ \pm 8,\ 39).$$

Chacune de ces classes correspond à une classe cubique. Les trois classes cubiques auxquelles correspondent les trois classes $(1,\ 1,\ 756)$, $(4,\ \pm 1,\ 189)$ se déduisent immédiatement des formules B (n.° 88) ; elles sont représentées par les trois formes

$$(0,\ 1,\ 2,\ -762),\quad (0,\ 2,\ 1,\ -94),\quad (0,\ 2,\ -1,\ -94).$$

Pour déterminer les autres classes cubiques, on doit résoudre les trois équations

$$11^3 = t^2 + 755a^2,\quad 19^3 = t^2 + 755a^2,\quad 21^3 = t^2 + 755a^2,$$

que l'on vérifie en prenant respectivement: $a=1$, $t=\pm 24$; $a=3$, $t=\pm 8$; $a=2$, $t=\pm 79$. A l'aide de ces solutions et des formules III (n.° 65) on obtient les trois formes

$$(1,\ -2,\ -7,\ 10),\quad (3,\ 1,\ -6,\ -8),\quad (2,\ -3,\ -6,\ 1)$$

dont les covariants quadratiques sont les trois formes

$$(11,\ 2,\ 69),\quad (19,\ 9,\ 44),\quad (21,\ 8,\ 39).$$

La substitution $(1, 0; 0, -1)$ donne ensuite celles dont les covariants sont les trois formes opposées. Donc

Les formes cubiques du déterminant $-4.755=-3020$ *se distribuent en neuf classes représentées par les neuf formes*

$$(0,\ 1,\ 2,\ -752),\quad (0,\ 1,\ 1,\ -94),\quad (0,\ 2,\ -1,\ -94),$$
$$(1,\ -2,\ -7,\ 10),\quad (3,\ 1,\ -6,\ -8),\quad (2,\ -3,\ -6,\ 1),$$
$$(1,\ 2,\ -7,\ -10),\quad (3,\ -1,\ -6,\ 8),\quad (2,\ 3,\ -6,\ -1).$$

93. Dans le cas qui nous occupe, où $\Delta=-(8l+3)$, la classification des formes cubiques du déterminant Δ ne peut pas se déduire immédiatement de celle du déterminant 4Δ. Les formes déterminantes des formes cubiques du déterminant Δ sont les formes quadratiques, improprement primitives que l'on obtient en composant la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right)$ avec les classes proprement primitives dont la triplication produit les trois classes

$$(1,\ 1,\ 1-\Delta),\quad \left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right).$$

Lorsque le déterminant Δ est régulier, les classes du genre principal sont renfermées dans une période unique, dont le nombre des termes est multiple de 3. Si l'on désigne ce nombre par $3h$, les trois classes dont la triplication produit la classe principale, sont celles qui ont pour indices les trois nombres h, $2h$, $3h$. Les deux classes $\left(4, \pm 1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$ dont la triplication donne la classe principale, ont pour indices les deux nombres h, $2h$. Les indices des classes dont la triplication produit ces deux classes, sont les racines des deux congruences

$$3\varpi \equiv h,\quad 3\varpi \equiv 2h \pmod{3h}.$$

Quand le nombre h est premier avec 3, ces deux congruences sont impossibles; dans ce cas la classe improprement primitive $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ est la seule qui corresponde à des formes cubiques du déterminant Δ, et la classe cubique $\left(0,\ 1,\ 1,\ \frac{3+\Delta}{4}\right)$, qui lui correspond, renferme toutes les formes cubiques de ce déterminant.

Si le nombre h est divisible par 3, soit $h = 3\mu$. Les deux congruences précédentes deviennent

$$3\varpi \equiv 3\mu,\quad 3\varpi \equiv 6\mu \pmod{9\mu};$$

elles admettent respectivement pour racines les nombres μ, 4μ, 7μ; 2μ, 5μ, 8μ. Mais on peut se borner aux deux classes opposées dont les indices sont μ et 8μ; car, en composant les trois classes de chaque groupe avec la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$, on obtient une résultante unique. On s'en assure de la manière suivante. Soit $E = (A,\ B,\ 4C)$ la classe quadratique prise pour base de la période principale. On a $h = 3\mu$ et par conséquent

$$\left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right) = E^{3\mu},\quad \left(4,\ \mp 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right) = E^{6\mu};$$

$$E^{4\mu} = E^{\mu}\left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right),\quad E^{7\mu} = E^{\mu}\left(4,\ \mp 2,\ \frac{1-\Delta}{4}\right);$$

en composant les deux dernières classes avec la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ on obtient une résultante unique, représentée par le produit

$$E^{\mu}\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right),$$

puisque la composition des deux classes $\left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right)$ avec la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ donne pour résultante cette dernière classe elle-même.

Ainsi, lorsque le déterminant Δ est régulier, il faut distinguer deux cas suivant que le nombre des classes quadratiques du genre principal est multiple de 9, ou non. Dans ce dernier cas, les classes cubiques du détermi-

nant Δ sont renfermées dans une seule classe représentée par la formule générale $\left(0, 1, 1, \frac{3+\Delta}{4}\right)$. Dans le premier cas on désignera par 9μ le nombre des classes du genre principal et l'on formera la période qui renferme ces classes, jusqu'à ce qu'on obtienne la classe dont l'indice est égal à μ. On représentera cette dernière classe par une forme $(A, B, 4C)$ dont le premier élément A soit un nombre premier non-diviseur de Δ. Les classes quadratiques

$$\left(2, 1, \frac{1-\Delta}{2}\right),\ (2A, B, 2C),\ (2A, -B, 2C)$$

sont les seules qui correspondent à des formes cubiques du déterminant Δ et chacune d'elles correspond à une classe cubique et à une seule.

94. Parmi les determinants réguliers, compris dans la formule $-(8l+5)$, un petit nombre seulement présentent un nombre de classes quadratiques divisible par 9. D'après les Tables de Gauss (*Werke*, t. II, p. 450), les nombres 59, 83, 107, 139, 211, 283. 331, 379, 411, 419, 451, 491, 499 sont, au dessous de 500, les seuls déterminants réguliers, changés de signe, pour lesquels le nombre des classes quadratiques soit divisible par 9. Pour toutes les autres valeurs de $-\Delta$ inférieures à 500, telles que 11, 19, 35, 43, 51, 67, 83, 91, 115, 123, 131, 147, 155, 163, 179, 187, 195, etc., les formes cubiques du déterminant Δ sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme $\left(0, 1, 1, \frac{3+\Delta}{4}\right)$.

Pour les déterminants réguliers, de la forme $-(8l+3)$, auxquels correspond un nombre multiple de 9 de classes quadratiques du genre principal, il faut former la période principale de manière à déterminer l'une des deux classes opposées qui correspondent aux indices μ et 8μ, le nombre des classes du genre principal étant désigné par 9μ. Cette classe étant représentée par une forme $(A, B, 4C)$, la forme cubique (a, b, c, d) dont la forme déterminante est $(2A, B, 2C)$, se déduit des formules

$$\text{IV.}\quad 2A^2 = 2Ab^2 - 2Bab + 2Cb^2,\quad Ac - Bb + Ca = 0,\quad Ad - Bc + Cb = 0,$$

dont la première peut être remplacée par les deux suivantes:

$$4A^3 = t^2 - \Delta a^2,\quad 2Ab - Ba = t.$$

Soit, par exemple, $\Delta = -59$. En prenant pour base la classe $L = (3, 1, 20)$,

on trouve $L^2 = (9, -2, 7)$, $L^4 = (4, 1, 15)$, $L^6 = (4, -1, 15)$. La période dont la base est la classe L peut donc être représentée par le produit symbolique

$$(1 + L + L^2)\ (1 + L^3 + L^6).$$

La forme $(3, -1, 20)$ opposée à la forme L et qui correspond à l'indice 8 est $L^2\ L^6$ de sorte que l'on a

$$(3, -1, 20) = (9, -2, 7)\ (4, -1, 15).$$

En composant les neuf classes précédentes avec la classe $(2, 1, 30)$, on obtient pour résultantes les trois classes

$$(2, 1, 30),\ L\,(2, 1, 30),\ L^2\,(2, 1, 30) = (3, -1, 20)\ (2, 1, 30).$$

L'ordre improprement primitif du déterminant -59 peut être représenté par les trois formes

$$(2, 1, 30), \quad (6, 1, 10), \quad (6, -1, 10).$$

Chacune des trois classes représentées par ces trois formes correspond à une classe cubique; savoir la classe $(2, 1, 30)$ à la classe cubique $(0, 1, 1, -14)$; la classe $(6, 1, 10)$ à une classe (a, b, c, d) que l'on détermine au moyen des formules

$$4.27 = t^2 + 59a^2, \qquad 6b - a = t,$$

$$3c - b + 5a = 0, \qquad 3d - c + 5b = 0.$$

On vérifie la première en prenant $a = 1$, $t = \pm 7$; les autres donnent ensuite $b = -1$, $c = -2$, $d = 1$. Donc

Le déterminant -59 présente trois classes cubiques représentées par les trois formes $(0, 1, 1, -14)$, $(1, -1, -2, 1)$, $(1, 1, -2, -1)$.

95. Lorsque le genre quadratique principal du déterminant Δ se compose de neuf classes, comme cela se présente pour les déterminants -59, -83, -107, -139, -211, -283, -331, -379, -411, -499, il suffit de connaitre une classe quelconque $(A, B, 4C)$ du genre principal, différente des trois classes $\left(4, \pm 1, \frac{1-\Delta}{4}\right)$, $(1, 0, -\Delta)$, pour affirmer que les trois classes de l'ordre improprement primitif, qui correspondent au genre principal sont représentées par les trois formes

$$\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right),\ (2A,\ \pm B,\ 2C).$$

Soit par exemple $\Delta = -83$. On trouve immédiatement la classe $(3, 1, 28)$ qui peut servir de base à la période principale. Par conséquent les formes déterminantes des formes cubiques du déterminant -83 sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes

$$(2,\ 1,\ 42),\quad (6,\ 1,\ 14),\quad (6,\ -1,\ 14).$$

La classe cubique à laquelle correspond la classe $(6, 1, 14)$ est représentée par la forme $(1, 1, -2, -3)$ que l'on déduit des formules

$$4.27 = t^2 + 83a^2,\ 6b - a = t,\ 3c - b + 7a = 0,\ 3d - c + 7b = 0.$$

Les formes cubiques du déterminant -83 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 1,\ -23),\quad (1,\ 1,\ -2,\ -3),\quad (1,\ -1,\ -2,\ 3).$$

Soit encore $\Delta = -107$. De la classe proprement primitive $(3, 1, 36)$ on déduit les deux classes $(6, \pm 1, 18)$ qui, jointes à la classe $(2, 1, 54)$, composent l'ordre improprement primitif. La classe cubique à laquelle correspond la classe $(6, 1, 18)$ se déduit des formules

$$4.27 = t^2 + 107a^2,\ 6b - a = t,\ 3c - b + 9a = 0,\ 3d - c + 9b = 0,$$

que l'on vérifie en prenant $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = -1$. Donc

Les formes cubiques du déterminant -107 *se distribuent en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 1,\ -26),\quad (1,\ 0,\ -3,\ -1),\quad (1,\ 0,\ -3,\ 1).$$

Soit enfin $\Delta = -411$. L'ordre quadratique proprement primitif se compose de deux genres formés chacun de neuf classes. On rencontre immédiatement la classe $(5, 2, 83)$ dont la duplication donne la classe $(19, 8, 25)$. Les formes quadratiques du déterminant -411 qui correspondent comme formes déterminantes à des formes cubiques du même déterminant sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes

$$(2,\ 1,\ 206),\quad (38,\ \pm 11,\ 14) = (14,\ \pm 3,\ 30).$$

Au moyen des formules IV:

$$4.7^3 = t^2 + 411.a^2,\quad 14b - 3a = t,\quad 7c - 3d + 15a = 0,\quad 7d - 3c + 15b = 0,$$

on obtient la forme cubique (1, − 2, − 3, 3) dont la forme déterminante est (14, 3, 30), et l'on conclut que:

Les formes cubiques du déterminant − 411 *sont renfermées dans trois classes repsésentées par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 1,\ -102),\quad (1,\ -2,\ -3,\ 3),\quad (1,\ 2,\ -3,\ -3).$$

96. Lorsque le nombre des classes quadratiques du genre principal est un multiple de 9 supérieur à 9, il n'est pas nécessaire de former complètement la période principale pour déterminer les classes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques du même déterminant. Soit par exemple $\Delta = -2803$. D'après les Tables de Gauss, ce déterminant est régulier; il présente 27 classes de formes quadratiques, rangées dans une seule période. En prenant pour base la forme (7, 2, 401), on trouve successivement

$$L = (7, 2, 401),\quad L^2 = (40, 23, 68),\quad L^3 = (53, 18, 59),\quad L^6 = (37, -3, 76).$$

La triplication des deux classes (53, ± 18, 59) donne les deux classes L^9, L^{18} représentées par les deux formes (4, ± 1, 701). Le genre principal peut se représenter par le produit symbolique

$$(1 + L + L^2)\ (1 + L^3 + L^6)\ (1 + L^9 + L^{18}).$$

La connaissance du terme $L^3 = (53, 18, 59)$ suffirait pour notre objet, ainsi que nous l'avons dit plus haut (n.º 94). Mais dans le cas actuel, il vaut mieux employer les deux classes L^6, L^{21} représentées par les deux formes (37, ± 3, 76), dont la triplication donne aussi les deux classes L^{18}, L^9, et qui conduisent à des calculs plus simples.

Les formes quadratiques qui correspondent à des formes cubiques du déterminant − 2803 sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes (2, 1, 1402), (2.19, ± 3, 2.37). La classe cubique à laquelle correspond la classe (2.19, 3, 2.37) se déduit des formules IV, qui deviennent dans le cas actuel

$$4.19^3 = t^2 + 2803a^2,\quad 38b - 3a = t,$$

$$19c - 3b + 37a = 0,\quad 19d - 3c + 37b = 0.$$

On vérifie la première en prenant $a=3$, $t=\pm 47$; les autres donnent ensuite $b=1$, $c=-1$, $c=-6$, $d=1$. Donc

Toutes les formes cubiques du determinant -2803 *se distribuent en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0,\ 1,\ 1,\ -700),\quad (3,\ -1,\ -6,\ 1),\quad (3,\ 1,\ -6,\ -1).$$

97. Lorsque le déterminant $\Delta=-(8l+3)$ est irrégulier, il faut ranger en périodes les classes du genre principal, afin de reconnaitre celles dont la triplication produit la classe principale et les deux classes $\left(4,\ \pm 1,\ \frac{1-\Delta}{4}\right)$. Si le degré de la plus grande période est égal à 3, la classe principale est la seule qui s'obtienne par triplication. Dans ce cas les classes quadratiques auxquelles correspondent les formes cubiques du déterminant Δ s'obtiennent en composant la classe $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$ avec les classes dont la triplication donne la classe principale. La classification des formes cubiques du déterminant Δ peut alors se déduire de celle qui se rapporte au déterminant quadruple 4Δ, en appliquant la règle énoncée au n. 70.

Soit $\Delta=-307$. Nous avons vu (n.° 90) que les classes quadratiques proprement primitives de ce déterminant sont au nombre de neuf représeutées par les neuf formes

$$(1,\ 1,\ 308),\quad (4,\ \pm 1,\ 77),\quad (7,\ \pm 1,\ 44),\quad (11,\ \pm 1,\ 28),\quad (17,\ \pm 4,\ 19).$$

L'ordre improprement primitif se réduit à trois classes représentées par les trois formes

$$(2,\ 1,\ 154),\quad (14,\ \pm 1,\ 22).$$

Les trois classes cubiques du déterminant -307 qui correspondent à ces trois classes se déduisent de celles du déterminant quadruple qui correspondent aux classes $(1,\ 1,\ 308)$, $(7,\ \pm 1,\ 44)$, savoir

$$(0,\ 1,\ 2,\ -304),\quad (1,\ 1,\ -6,\ -8.\quad (1,\ -1,\ -6,\ 8),$$

en doublant le premier coefficient, puis en divisant le troisième coefficient par 2 et le dernier par 4. On obtient ainsi les trois formes

$$(0,\ 1,\ 1,\ -76),\quad (2,\ 1,\ -3,\ -2),\quad (2,\ -1,\ -3,\ 2),$$

qui représentent les trois classes cherchées.

Soit $\Delta = -339$. Le genre quadratique principal de ce déterminant se compose de neuf classes dont chacune produit par triplication la classe principale. Les classes improprement primitives obtenues en composant ces neuf classes avec la classe $(2, 1, 170)$ se réduisent à trois, que l'on peut représenter par les trois formes

$$(2, 1, 170), \quad (26, \pm 5, 14).$$

Les classes cubiques correspondantes s'obtiennent en appliquant la règle ci-dessus énoncée aux trois classes (n.º 91)

$$(0, 1, 2, -336), \quad (2, 3, -2, -8), \quad (2, -3, -2, 8)$$

qui correspondent aux trois classes proprement primitives $(1, 1, 340)$, $(13, \pm 5, 28)$. On trouve ainsi les trois classes

$$(0, 1, 1, -84), \quad (4, 3, -1, -2), \quad (4, -3, -1, 2).$$

98. Pour compléter ce que nous avons dit sur les déterminants négatifs qui n'ont pas d'autre facteur multiple que 4, nous ajouterons quelques mots pour les déterminants compris dans la formule $4\Delta = -4(4l + 1)$, tels que -20, -52, -68, etc. Dans ce cas, les formes quadratiques du déterminant Δ sont proprement primitives. Les seules de ces classes qui correspondent à des formes cubiques sont celles dont la triplication produit la classe principale; chacune d'elles correspond à une classe cubique du déterminant 4Δ, et à une seule (n.º 24, 28). La classe principale $(1, 1, 1 - \Delta)$ correspond à une classe cubique représentée par la formule générale $(0, 1, 2, 3 + \Delta)$. Si l'on désigne par (A, B, C) l'une des classes quadratiques dont la triplication produit la classe principale, la classe cubique correspondante est déterminée par les formules III' du n.º 65.

Lorsque le nombre des classes quadratiques du genre principal est premier avec 3, la seule classe dont la triplication produise la classe principale est cette classe principale elle-même. Dans ce cas, toutes les formes cubiques du déterminant 4Δ sont renfermées dans une même classe représentée par la formule générale $(0, 1, 2, 3 + \Delta)$. Or, pour le plus grand nombre des déterminants de la forme considérée, le nombre des classes quadratiques primitives est premier avec 3. Parmi les valeurs de $-\Delta = 4l + 1$ inférieures à 200, les seules auxquelles corresponde un nombre de classes quadratiques du déterminant Δ, divisible par 3, sont les suivantes 29, 53,

61, 81, 89, 109, 121, 129, 157, 169, 189, 195. Pour les autres valeurs, telles que 5, 13, 17, 21, 33, 37,... le nombre des classes quadratiques du déterminant Δ est premier avec 3, de sorte que l'on peut énoncer immédiatement les théorèmes suivants :

Les formes cubiques du déterminant -20 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 2, -2)$.

Les formes cubiques du déterminant -52 *sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme* $(0, 1, 2, -10)$.

Les formes cubiques du déterminant -68 *sont renfermées dans une classe unique, représentée par la forme* $(0, 1, 2, -14)$. Et ainsi de suite.

99. Soit $\Delta = -29$. Les classes quadratiques du genre principal du déterminant -29 sont au nombre de trois représentées par les trois formes

$$(1, 1, 30), \quad (5, \pm 1, 6).$$

Elles correspondent chacune à une classe cubique, puisque chacune d'elles produit par triplication la classe principale. La classe cubique à laquelle correspond la classe $(5, 1, 6)$ est déterminée par les formules

$$125 = t^2 + 29a^2, \quad 5b - a = t, \quad 5c - 2b + 6a = 0, \quad 5d - 2c + 6b = 0,$$

d'où l'on déduit $a = 2$, $b = 1$, $c = d = -2$. Par conséquent *les formes cubiques du déterminant* -116 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes* $(0, 1, 2, -26)$ $(2, 1, -2, -2)$, $(2, -1, -2, 2)$:

Soit $\Delta = -53$. Les formes quadratiques du genre principal du déterminant -53 sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes

$$(1, 1, 54), \quad (9, \pm 1, 6).$$

Comme ces trois classes produisent par triplication la classe principale, elles correspondent à trois classes cubiques. Les formules

$$729 = t^2 + 53a^2, \quad 9b - a = t, \quad 9c - 2b + 6a = 0, \quad 9d - 2c + 6b = 0,$$

donnent la forme cubique $(1, 3, 0, -2)$ dont le covariant quadratique est $(9, 1, 6)$. Par conséquent *les formes cubiques du déterminant* -212 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -50), \quad (1, 3, 0, -2), \quad (1, -3, 0, 2).$$

Soit $\Delta = -61$. Le genre quadratique principal se compose des trois classes $(1, 1, 61)$, $(5, \pm 2, 13)$. La classe cubique $(1, 2, -1, -6)$ qui correspond à la classe $(5, 2, 13)$ s'obtient au moyen des formules IV (n° 94). Donc

Les formes cubiques du déterminant -244 *se distribuent en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -58), \quad (1, 2, -1, -6), \quad (1, -2, -1, 6).$$

$\Delta = -109$. Le genre principal se compose des trois classes $(1, 1, 110)$, $(5, \pm 1, 22)$ dont chacune correspond à une classe cubique. Les formules

$$125 = t^2 + 109a^2, \quad 5b - a = t, \quad 5c - 2b + 22a = 0, \quad 5d - 2c + 22b = 0$$

déterminent la forme cubique $(1, 1, -4, -6)$ qui correspond au covariant $(5, 1, 22)$. On déduit de là, eu égard aux observations précédentes, que :

Les formes cubiques du déterminant -436 *sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes*

$$(0, 1, 2, -106), \quad (1, 1, -4, -6), \quad (1, -1, -4, 6).$$

100. A ces exemples nous en ajouterons un autre relatif à un déterminant qui admet des facteurs multiples autres que 4, afin de faire remarquer que les formes cubiques du déterminant 4Δ qui correspondent à des formes primitives du déterminant Δ, se déterminent de la même manière, soit que Δ présente des facteurs multiples, soit qu'il ne soit composé que de facteurs premiers inégaux. Seulement, la classification est complète dans le dernier cas, tandis que, dans le premier, il reste à déterminer les classe cubiques qui peuvent correspondre aux ordres dérivés.

Soit $\Delta = -81$. Le genre principal du déterminant -81 se compose de trois classes représentées par les trois formes $(1, 1, 82)$, $(13, \pm 6, 9)$. Les formules

$$13^3 = t^2 + 81a^2, \quad 13b - 6a = t, \quad 13c - 12b + 9a = 0, \quad 13d - 12c + 9b = 0$$

donnent la forme cubique $(1, 4, 3, 0)$ qui correspond au covariant $(13, 6, 9)$. On conclut de là que les formes cubiques dont les covariants quadratiques sont des formes primitives du déterminant -81, se distribuent en trois classes représentées par les trois formes

(0, 1, 2, − 78), (1, 4, 3, 0), (1, − 4, 3, 0).

Mais il reste à chercher les classes cubiques qui peuvent correspondre aux classes dérivées (9, 9, 18), (3, 3, 30), (6, 3, 15).

$\Delta = m^2\delta$, $D = 4m^2\delta$ et $D = m^2\delta$.

101. Lorsque le déterminant proposé renferme des facteurs impairs multiples, après avoir trouvé, comme dans les cas précédents, les classes des formes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'un des deux ordres primitifs, il reste à chercher celles qui correspondent à des classes quadratique dérivées. Cette recherche se ramène à la résolution de l'un des trois systèmess (5), (7) ou (9) du n.º 24. Nous avons donné d'amples détails pour le cas où le problème se ramène au système (5); nous avons démontré (n.º 42) que, si $\delta = 8l + 1$,

Pour qu'il existe des formes quadratiques du déterminant $m^2\delta$ et de l'ordre ($2m$, 2) qui correspondent à des formes cubiques, il faut et il suffit que l'une des classes quadratiques du déterminant δ, par lesquelles le nombre m est représenté, s'obtienne par triplication.

Dans le n.º 43, nous avons exposé une méthode pour déterminer les classes quadratiques dérivées ($2mP$, mQ, $2mR$) du déterminant $m^2\delta$ qui correspondent à des classes cubiques du même déterminant. Enfin nous avons ajouté de nombreux exemples, tant pour les déterminants positifs que pour les déterminants négatifs. Dans le n° 52, 53, 54 nous nous sommes occupé du cas où δ est de la forme $8l + 5$.

Il nous reste à examiner les cas dans lesquels on est amené à l'un des deux autres systèmes (7) ou (9). Dans le système (7) le covariant quadratique est une forme dérivée (mP, mQ, mR) dont les coefficients sont liés à ceux de la forme cubique correspondante par l'un des deux systèmes équivalents

(1). $mP = b^2 - ac$, $2mQ = bc - ad$, $mR = c^2 - bd$;

(2). $mP^2 = Pb^2 - 2Qab + Ra^2$, $Pc - 2Qb + Ra = 0$, $Pd - 2Qc + Rb = 0$.

Nous avons démontré (n.º 19) que

La condition nécessaire et suffisante pour que le forme (mP, mQ, mR),

où l'on désigne par P *un nombre premier, non diviseur de* 2mQ, *soit la forme déterminante d'une forme cubique primitive, est que le produit du nombre* m *multiplié par le cube du nombre* P *soit représenté proprement par la forme principale du déterminant* $\delta = Q^2 - PR$.

Au moyen de ce théorème on trouve aisément les classes quadratiques de l'ordre dérivé $(m, 1)$ du déterminant $m^2\delta$ qui correspondent à des formes cubiques du déterminant $4m^2\delta$. Car pour que le produit de deux facteurs premiers entre eux soit représenté proprement par la forme principale du déterminant δ, il faut que les deux facteurs soient représentés par deux classes opposées. D'ailleurs les deux classes opposées auxquelles appartiennent les représentations du cube d'un nombre premier P s'obtiennent par la triplication des deux classes $(P, \pm Q, R)$. La condition énoncée dans le théorème précédent peut donc être remplacée par la suivante, savoir que la classe (P, Q, R) soit l'une des classes proprement primitives du déterminant δ dont la triplication produit des classes par lesquelles le nombre m est représenté proprement.

102. On déduit de là une méthode semblable à celle que nous avons exposée au n° 43. On détermine d'abord les diverses racines de la congruence $l^2 - \delta \equiv 0 \pmod{m}$, afin d'exprimer par la formule générale

$$M = \left(m, l, \frac{l^2 - \delta}{m}\right)$$

le diverses classes quadratiques du déterminant δ auxquelles appartiennent les représentations du nombre m.

1° Si la congruence $l^2 - \Delta \equiv 0 \pmod{m}$ n'admet pas de solution, ou bien si aucune des classes M ne peut s'obtenir par triplication, il n'existe aucune forme quadratique de l'ordre $(m, 1)$ du déterminant $m^2\delta$ qui corresponde à des formes cubiques du déterminant $4m^2\delta$.

2° Si une ou plusieurs des classes désignées par M s'obtiennent par triplication, soit H une classe dont la triplication produit la classe M. On a $H^3 = M$ et par conséquent les deux classes H, M sont renfermées dans un même genre et dans une même période. Soit E la base de cette période, λ le nombre des classes distinctes qu'elle renferme, ϖ l'indice de la classe H, et μ celui de la classe M. Le nombre ϖ doit vérifier la congruence (n° 43)

$$3\varpi \equiv \mu \pmod{\lambda}.$$

Lorsque λ est premier avec 3, cette congruence admet toujours une solution et une seule. Mais lorsque λ est multiple de 3, cette congruence est impossible, si μ est premier avec 3, et, dans le cas contraire, elle admet les trois solutions

$$\tfrac{1}{3}\mu,\quad \tfrac{1}{3}(\mu+\lambda),\quad \tfrac{1}{3}(\mu+2\lambda).$$

On peut donc déterminer les diverses classes H dont la triplication donne les diverses classes M utiles pour notre problème. On représentera chacune de ces classes par une forme (P, Q, R) dont le premier élément soit un nombre premier non-diviseur de $2m\delta$; puis, au moyen des formules suivantes

$$(3)\quad \left| \begin{aligned} & mP^3 = t^2 - \delta a^2,\quad Pb - Qa = t, \\ & Pc - 2Qb + Ra = 0,\quad Pd - 2Qc + Rb = 0, \end{aligned} \right.$$

on déterminera les classes cubiques qui correspondent à la classe dérivée (mP, mQ, mR). Tout ce que nous avons dit (n° 14 et suivants) relativement à la manière de résoudre l'équation

$$mP^3 = u^2 - \delta v^2$$

peut s'appliquer ici. D'ailleurs nous y reviendrons en donnant des exemples.

103. On procède d'une manière toute semblable dans le cas où le problème se ramène aux équations (9) du n° 24. Dans ce cas, on a

$$(4)\qquad A = mP = b^2 - ac,\quad B = mQ = bc - ad,\quad C = mR = c^2 - bd.$$

La forme déterminante $(2mP, mQ, 2mR)$ est le double du covariant quadratique. Les éléments de la forme cubique correspondante vérifient les formules

$$(5)\qquad 2mP^2 = Pb^2 - Qab + Rb^2,\quad Pc - Qb + Ra = 0,\quad Pd - Qc + Rb = 0,$$

dont la première peut être remplacée par les deux suivantes:

$$(6)\qquad 8mP^3 = t^2 - \delta . a^2,\quad 2Pb - Qa = t,\quad (Q^2 - 4PR = \delta).$$

La forme déterminante $(2mP, mQ, 2mR)$ s'obtient en composant la forme $\left(2m, m, m\dfrac{1-\delta}{2}\right)$ avec la forme proprement primitive $(P, Q, 4R)$ du déterminant δ dont la triplication produit l'une des classes auxquelles appar-

tiennent les représentations du nombre $8m$. En effet, nous avons démontré (n° 21) le théorème suivant :

Théorème XI. *Pour que la forme* (2mP, mQ, 2mR) *dans laquelle* Q *est impair et* P *désigne un nombre premier non-diviseur de* 2mQ, *corresponde à une forme cubique primitive* (a, b, c, d) *du déterminant* $4m^2\delta = 4m^2(Q^2 - 4PR)$, *la seule condition nécessaire est que l'on puisse résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'équation*

$$(6) \qquad 8m.P^3 = t^2 - \delta u^2, \quad \delta = Q^2 - 4PR.$$

Or pour que l'équation (6) soit possible, il faut d'abord que δ soit de la forme $8l \pm 1$. Il faut ensuite que l'une des classes proprement primitives auxquelles appartiennent les représentations du nombre $8m$ s'obtienne par la triplication de la classe (P, Q, 4R). Par conséquent les classes proprement primitives (P, Q, 4R) du déterminant δ, d'où l'on déduit les classes dérivées de l'ordre $(2m, 2)$ qui correspondent à des formes cubiques du déterminant $4m^2\delta$, peuvent se déterminer par un procédé tout semblable à celui qui a été exposé au n° 43 ; il suffit d'y remplacer m par $8m$.

104, Après avoir déterminé les diverses racines de la congruence

$$l^2 - \delta \equiv 0 \pmod{8m}$$

on représentera les diverses classes proprement primitives du déterminant δ auxquelles appartiennent les représentations du nombre $8m$, par la formule générale

$$M = \left(8m,\ l, \frac{l^2 - \delta}{8m}\right),$$

dans laquelle on ne doit accepter que les valeurs de l qui donnent au quotient $(l^2 - \delta) : 8m$ une valeur impaire. Les diverses classes désignées par M sont renfermées dans un même genre. Si donc le déterminant δ est régulier, toutes ces classes M sont renfermées dans une même période qui renferme en même temps les classes du genre caractérisé par $8m$ et celles du genre principal. Si le degré de cette période est premier avec 3, chacune des classes M s'obtient par triplication et d'une seule manière. Si au contraire ce degré est multiple de 3, celles des classes M dont les indices ne sont pas divisibles par 3 doivent être rejetées, parce qu'elles ne

s'obtiennent pas par triplication, tandis que les autres s'obtiennent chacune par la triplication de trois classes, qui ont pour indices

$$\tfrac{1}{3}\mu,\ \tfrac{1}{3}(\mu+\lambda),\ \tfrac{1}{3}(\mu+2\lambda)$$

en supposant que le degré de la période et l'indice de la classe M sont désignés respectivement par λ et par μ. On peut donc trouver toutes les classes proprement primitives (P, Q, 4R) du déterminant δ, d'où dérivent les classes ($2m$P, mQ, $2m$R) qui correspondent à des classes cubiques du déterminant $4m^2\delta$. Les classes cubiques qui correspondent à chacune de ces classes ($2m$P, mQ, $2m$R) se déterminent ensuite au moyen des formules (5) et (6) du n.º précédent.

$$\Delta = m^2\delta = 8l + 1,\quad D = 4\Delta \text{ et } D = \Delta.$$

105. Soit $\Delta = -m^2.23$. Le déterminant -23 n'offre que trois classes de formes quadratiques proprement primitives, représentées par les trois formes (1, 1, 24), (3, ± 1, 8). Si m est un nombre premier représenté par les deux classes (3, ± 1, 8) tel que 3, 13, 31,... il est impossible de trouver un nombre premier impair, qui rende l'équation

$$mP^3 = t^2 + 23u^2$$

résoluble en nombres entiers et premiers entre eux t, u. Mais l'équation

$$8mP^3 = t^2 + 23u^2$$

peut alors se résoudre en prenant P égal à l'un quelconque des diviseurs premiers impairs de la formule $t^2 + 23u^2$. Dans ce cas aucune classe de l'ordre dérivé (m, 1) du détermivant $-23m^2$ ne correspond à des formes cubiques. Mais les trois classes de l'ordre dérivé ($2m$, 2), savoir

$$(2m,\ m,\ 12m),\quad (6m,\ \pm m,\ 4m)$$

correspondent à des formes cubiques du déterminant quadruple $-4.23m^2$.

Soit par exemple $m = 3$. Quel que soit le nombre P impair, les représentations de son cube appartiennent toutes à la classe principale (1, 0, 23). Comme aucun des deux nombres 3, 12 n'est représenté par cette classe, aucune des deux équations

$$3P^3 = t^2 + 23u^2, \quad 12P^3 = t^2 + 23u^2$$

n'est possible en nombres entiers et premiers entre eux. Par conséquent aucune des classes dérivées $(m, m, 24m)$, $(3m, \pm m, 8m)$ ne correspond à des formes cubiques; les classes dérivées de l'ordre $(2m, 2)$ ne correspondent à aucune forme cubique du même déterminant; elles ne correspondent qu'à des classes cubiques du déterminant quadruple $-4.9.23$.

Les formes cubiques du déterminant -828 se partagent en deux groupes, dont l'un correspond à l'ordre quadratique proprement primitif du déterminant -207 et l'autre à l'ordre dérivé $(6, 2)$ du même déterminant. La classificatinn des formes cubiques du premier groupe s'effectue de la même manière que si le déterminant -207 n'était divisible par aucun carré. Il faut d'abord chercher les classes dout la triplication donne la classe principale $(1, 1, 208)$.

Les classes proprement primitives du déterminant -207 sont renfermées, au nombre de six, dans une période unique

$$N = (27, 3, 8), \quad N^2 = (16, 1, 13), \quad N^3 = (9, 0, 23),$$

$$N^4 = (16, -1, 13), \quad N^5 = (27, -3, 8), \quad N^6 = (1, 1, 208).$$

Les trois classes N^2, N^4, N^6 sont les seules dont la triplication produise la classe principale; elles sont aussi les seules qui correspondent à des formes cubiques. La classe principale correspond à la classe cubique $(0, 1, 2, -204)$. La classe $(13, 1, 16)$ correspond à une classe (a, b, c, d) que l'on détermine au moyen des formules

$$13^3 = t^2 + 207a^2, \quad 13b - a = t, \quad 13c - 2b + 16a = 0, \quad 13d - 2c + 16b = 0.$$

On vérifie la première en prenant $a = 2$, $t = \pm 37$; puis l'on déduit des suivantes : $b = 3$, $c = -2$, $d = -4$. Donc les trois classes quadratiques

$$(1, 1, 208), \quad (13, 1, 16), \quad (13, -1, 16)$$

correspondent à trois classes cubiques, représentées par les trois formes

$$(0, 1, 2, -204), \quad (2, 3, -2, -4), \quad (2, -3, -2, 4).$$

Les formes cubiques du déterminant -828 dont les formes déterminantes

sont improprement primitives correspondent aux classes quadratiques que l'on obtient en composant la classe (2, 1, 101) avec les classe proprement primitives dont la triplication donne les classes (8, ± 3, 27) par lesquelles le nombre 8 est représenté proprement. Or ces deux classes N, N^5 ayant des indices premiers avec 3, tandis que le degré de la période est 6, un multiple de 3, il est impossible de les obtenir par triplicotion. Il n'y a donc pas de forme cubique du déterminant − 828 qui corresponde à l'ordre improprement primitif.

Les formes cubiques du déterminant − 207 dont les formes déterminantes sont primitives, correspondent aux classes improprement primitives que l'on obtient (n.º 62) en composant la classe (2, 1, 104) avec les classes proprement primitives dont la triplication produit la classe principale. Or en composant la classe (2, 1, 104) avec les trois classes (1, 1, 208), (13, ± 1, 16), on obtient les trois classes (2, 1, 104) (26, ± 1, 8). Les trois classes cubiques qui leur correspondent s'obtiennent par l' application de la règle du n° 70, au moyen des trois classes obtenues précédemment pour le déterminant quadruple. On trouve ainsi

$$(0,\ 1,\ 1,\ -51),\quad (4,\ 3,\ -1,\ -1),\quad (4,\ -3,\ -1,\ 1).$$

106. Il reste à trouver les formes cubiques qui correspondent à l'ordre dérivé (6, 2). Cet ordre est composé de trois classes représentées par les trois formes (6, 3, 36), (18, ± 3, 12). Nous avons déjà remarqué qu'il ne correspond à aucune forme cubique du même déterminant; par conséquent les formes cubiques correspondantes appartiennent au déterminant quadruple − 828.

Les classes cubiques qui correspondent à la classe (6, 3, 36) se déterminent au moyen des formules

$$8.3 = t^2 + 23a^2,\quad 2b - a = t,\quad c - b + 6a = 0,\quad d - c + 6b = 0,$$

que l'on déduit des formules (5) et (6) en y faisant $P = Q = 1$, $R = 6$. On résout la première en prenant $a = 1$, $t = \pm 1$. La solution $a = 1$, $t = 1$ donne la forme (1, 1, − 5, − 11); la solution $a = 1$, $t = -1$ donne la forme (1, 0, − 6, − 6). Les deux formes obtenues sont improprement équivalentes; la deuxième se transforme en la première par la substitution (1, 1; 0, − 1), Si elles étaient en même temps proprement équivalentes, elles se transformeraient l'une en l'autre par l'une des substitutions propres, qui transfor-

ment en lui-même leur covariant commun (6, 3, 36). Or ce covariant ne se transforme en lui-même que par les deux substitutions propres ± (1, 1; 0, 1), et par les deux substitutions impropres (1, 1; 0, — 1). On reconnaît aisément qu'aucune des deux substitutions ± (1, 0; 0, 1) ne transforme (1, 0, — 6, — 6) en (1, 1, — 5, — 11). Par conséquent les deux formes obtenues représentent deux classes distinctes, que l'on peut représenter par les deux formes (1, 0, — 6, — 6), (1, 0, — 6, 6).

Les classes cubiques qui correspondent à la classe quadratique (18, 3, 12) sont déterminées par les formules

$$24.3^3 = t^2 + 23a^2, \quad 6b - a = t, \quad 3c - b + 2a = 0, \quad 3d - c + 2b = 0.$$

La première admet deux systèmes de solutions, $a = 1$, $t = \pm 25$; $a = 3$, $t = \pm 21$, au moyen desquelles on obtient les deux formes cubiques (1, — 4, — 2, 2), (3, — 3, — 3, 1). Ces deux formes ne sont pas équivalentes, parce qu'elles ne se transforment l'une en l'autre par aucune des substitutions qui transforment en lui-même leur covariant commun. Elles représentent par conséquent deux classes distinctes. La substitution impropre (1, 0; 0, — 1) donne ensuite les deux classes cubiques (1, 4, — 2, — 2), (3, 3, — 3, — 1) qui correspondent à la classe quadratique (18. — 3, 12).

En résumé le déterminant — 828 présente neuf classes de formes cubiques représentées par les formes suivantes :

(0, 1, 2, — 204), (2, 3, — 2, — 4), (2, — 3, — 2, 4),

(1, 0, — 6, — 6), (1, 0, — 6, 6), (1, — 4, — 2, 2),

(1, 4, — 2, — 2), (3, — 3, — 3, 1), (3, 3, — 3, — 1);

le déterminant — 207 n'en présente que trois représentées par les trois formes (0, 1, 1, — 51), (4, 3, — 1, — 1), (4, — 3, — 1, 1).

107. Soit $\Delta = - 34983 = - (39)^2.23$. Les formes quadratiqnes de ce déterminant sont partagées en deux ordres primitifs et en six ordres dérivés (3, 1), (6, 2); (13, 1), (26, 2); (39, 1), (78. 2). Nous partagerons de même en divers groupes les formes cubiques du déterminant 4Δ suivant l'ordre dans lequel leurs covariants quadratiques se trouvent compris. Nous chercherons d'abord celles dont les covariants quadratiques appartiennent à l'ordre primitif. Tous ces covariants sont renfermés dans les classes dont la triplication produit la classe principale $(1, 0, - \Delta)$. Comme ces classes appartiennent au genre

principal, on les obtient en rangeant en période les classes du genre principal, qui sont au nombre de 18, renfermées dans une seule période. En prenant pour base la classe $(16, -13, 2197) = L$, on trouve

$$L^2 = (64, -5, 547), \quad L^3 = (169, 18, 243) = \varphi, \quad \varphi^2 = (169, 26, 211),$$

$$\varphi^3 = (169, 0, 207) \quad \varphi^4 = (169, -26, 211), \quad \varphi^6 = (1, 0, 34983).$$

Les classes dont la triplication produit la classe principale sont les trois classes φ^2, φ^4, φ^6, c'est-à-dire la classe principale et les deux classes opposées $(211, \pm 26, 169)$. La classe principale correspond à la classe cubique $(0, 1, 2, -34980)$; la classe $(169, 26, 211)$ représentée par la forme équivalente $(211, 185, 328)$ correspond à une classe cubique, déterminée par les formules

$$(211)^3 = t^2 + 34983a^2 \qquad 211b - 185a = t,$$

$$211c - 370b + 328a = 0, \quad 211d - 370c + 328b = 0.$$

On déduit de la première

$$a^2 < \frac{(211)^3}{34983} < 270 < (17)^2.$$

D'ailleurs la congruence relative au module 4 exige que a soit impair. La considération du module 7 exclut les deux valeurs $a = 5$, $a = 9$. De même le module 5 exclut la valeur $a = 1$, le module 11, la valeur $a = 11$, et le momedule 17, la valeur $a = 7$. Il ne reste ainsi que trois valeurs à essayer pour le nombre a, savoir 3, 13 et 15. On obtient ainsi la solution $a = 15$, $t = \pm 1234$. On déduit des autres formules $b = 49$, $c = 10$, $d = -12$. Donc les formes cubiques du déterminant -4.34983 dont les covariants quadratiques appartiennent à l'ordre proprement primitif sont distribuées en trois classes représentées par les trois formes

$$(0, 1. 2, -84980), \ (15, 19, 10, -12), \ (15, -19, 10, 12)\cdot$$

Par l'application de la règle du n.° 70, on déduit de là les trois classes cubiques du déterminant -34963 dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre improprement primitif, savoir

$$(0, 1, 1, -896), \quad (30, 19, 5, -3), \quad (30, -19, 5, 3).$$

108. Pour déterminer les classes cubiques des deux déterminant, Δ et 4Δ

qui correspondent aux ordres dérivés, nous chercherons d'abord quels sont ceux des ordres dérivés du déterminant $\Delta = -(39)^2\,23$ auxquels peuvent corpondre des formes cubiques.

Soit $(m\text{P}, m\text{Q}, 4m\text{R})$ une classe de l'ordre dérivé $(m, 1)$ du déterminant $-(39)^2\,23$. Pour que cette classe corresponde à des formes cubiques, il faut que l'on puisse trouver un nombre premier impair P qui rende possible l' équation

$$m\text{P}^3 = t^2 + 23.n^2a^2 = t^2 + 23\,(na)^2,\ mn = 39.$$

Pour cela, il faut avant tout que le nombre m soit représenté par la classe $(1, 0, 23)$. En effet, le cube d'un nombre impair quelconque, diviseur de la formule $t^2 + 23$, ne peut être représenté par aucune classe quadratique du déterminant -23, différente de la classe principale, parce que le déterminant -23 ne présente que trois classes proprement primitives. Le produit $m\text{P}^3$ ne peut donc être représenté par la forme $(1, 0, 23)$ qu'autant que le nombre m est lui-même représenté par cette même forme. Or, des trois nombres 3, 13, 39, le dernier seul est représenté par la forme $(1, 0, 23)$. Par conséquent les deux ordres dérivés $(3, 1)$, $(13, 1)$ ne correspondent à aucune classe cubique.

Soit $(2m\text{P}, m\text{Q}, 2m\text{R})$ une classe de l'ordre dérivé $(2m, 2)$, du déterminant $-(39)^2.23$. Pour que cette classe corresponde à des formes cubiques du même déterminant, il faut que l'on puisse résoudre en nombres entiers et premiers entre eux l'une des deux équations

$$m\text{P}^3 = t^2 + 23\,(na)^2,\ 4m\text{P}^3 = t^2 + 23\,(na)^2,\ mn = 39.$$

Le seconde est évidemment impossible. Nous venons de voir que la première est impossible pour les deux valeurs $m = 3$, $m = 13$. Par conséquent les deux ordres dérivés $(6, 2)$ $(26, 2)$ du déterminant $-(39)^2 23$ ne correspondent à aucune forme cubique du même déterminant.

Pour que la classe considérée $(2m\text{P}, m\text{Q}, 2m\text{R})$ corresponde à des formes cubiques du déterminant quadruple, il faut que l'on puisse résoudre l'équation

$$8m.\text{P}^3 = t^2 + 23.n^2.a^2 = t^2 + 23(na)^2,\ mn = 39.$$

Il faut avant tout que le nombre $8m$ soit représenté par la forme $(1, 0, 23)$. Cette condition est remplie pour chacune des trois valeurs 3, 13 et 39 de m. Elle est suffisante pour $m = 39$; mais pour les deux autres valeurs, il faut encore que le nombre $8m$ soit représenté par une classe du déterminant $-23n^2$

qui puisse s'obtenir par la triplication d'une autre classe (P, Q, 4R). Nous aurons donc à effectuer la classification des formes proprement primitives pour les deux déterminants -9.23, -169.23, afin de déterminer les classes (P, Q, 4R) dont la triplication produit les classes auxquelles appartiennent les représentations des deux nombres 104, et 24, respectivement.

109. Les classes proprement primitives du déterminant -3887 sont au nombre de 36 renfermées dans une période dont la base est la classe $(8, 3, 487) = L$. On a

$$L^2 = (16, -1, 243). \quad L^3 = (169, -39, 32) = M,$$

$$M^2 = (169, -26, 27), \quad M^3 = (169, 72, 59), \quad M^4 = (169, -65, 48),$$

$$M^5 = (169, 13, 24), \quad M^6 = (169, 0, 23), \quad M^7 = (169, -13, 24), \ldots$$

On peut représenter ces 36 classes par le produit symbolique

$$(1 + M + M^2 + \ldots + M^{11})\ (1 + L + L^2).$$

Le nombre 24 est représenté par les deux classes opposées $M^5 = L^{15}, M^7 = L^{21}$. Ces classes s'obtiennent par la triplication des classes dont les indices vérifient respectivement les deux congruences

$$3\varpi \equiv 15, \quad 3\varpi \equiv 21 \pmod{36},$$

dont les racines sont 5, 17, 29; 7, 19, 31. Par conséquent les six classes opposées deux à deux, dont les indices sont respectivement 5, 31; 7, 29; 17, 19 donnent par leur composition avec la classe (6, 3, 5832) six classes de l'ordre (6, 2) qui correspondent à des formes cubiques du determinant -4.34983.

Les deux classes L^{15}, L^{21} ne sont pas les seules qui représentent le nombre 24; les deux classes $(24, \pm 5, 163)$ jouissent de la même propriété; mais comme leurs indices sont premiers avec 3, elles ne s'obtiennent pas par triplication. Par conséquent l'ordre dérivé (6, 2) ne renferme pas de classe autre que les six déterminées, qui corresponde à des formes cubiques. Or on trouve

$$L^5 = M.L^2 = (32, 7, 123)\ (16, -1, 243) = (31, 9, 128),$$

$$L^7 = M^2L = (27, -1, 144)\ (8, 3, 487) = (73, -37, 72),$$

$$L^{19} = M^6L = (169, 0, 23)\ (8, 3, 487) = (47, -25, 96).$$

Par conséquent les six classes de l'ordre (6, 2) représentées par les six formes

$$(6.31, \pm 27, 6.32), \quad (6.73, \pm 111, 6.18), \quad (6.47, \pm 75, 6.24).$$

correspondent à des classes cubiques du déterminant $-4(39)^2.23$.

Pour déterminer ces classes, nous avons à résoudre les trois équations

$$24.31^3 = t^2 + 3887a^2, \quad 24.73^3 = t^2 + 3887a^2, \quad 24.47^3 = t^2 + 3887a^2.$$

On les vérifie en prenant respectivement

$$a = 13, \ t = \pm 241 \ ; \ a = 49, \ t = \pm 61 \ ; \ a = 7, \ t = \pm 1517.$$

Moyennant ces solutions on déduit des formules (5) et (6) du n° 103 les formes cubiques

$$(13, -2, -14, -2), \ (49, 12, -6, -6), \ (7, 18, 6, -6)$$

dont les covariants quadratiques sont les trois formes

$$(6.31, 27, 6.32), \ (6.73, 111, 6.18), \ (6.47, 75, 6.24).$$

Ainsi l'ordre dérivé (6, 2) du déterminant $-(39)^2.23$ renferme six classes auxquelles correspondent six classes cubiques représentées par les six formes

$$(13, -2, -14, -2), \quad (49, 12, -6, -6), \quad (7, 18, 6, -6).$$

$$(13, 2, -14, 2), \quad (49, -12, -6, 6), \quad (7, -18, 6, 6).$$

110. Les classes de l'ordre dérivé (26, 2) du déterminant proposé s'obtiennent en multipliant par 13 les formes improprement primitives du déterminant $-207 = -9.23$. Nous avons vu (n.° 105) que les formes proprement primitives du déterminant -207 sont distribuées en six classes, savoir

$$N=(27, 3, 8), \ N^2=(13, -1, 16), \ N^3=(9, 0, 23), \ N^4=(13, 1, 16), \ N^5=(27, -3, 8), \ N^6=1.$$

Le produit $8.13 = 104$ est représenté proprement par les trois classes N, N^5, N^3. Mais comme les deux premières ne s'obtiennent pas par triplication, nous n'avons pas à nous en occuper. La classe N^3 s'obtient par la triplication des trois classes N, N^5, N^3. En composant ces trois classes avec la classe improprement primitive (2, 1, 104) on obtient trois classes improprement primitives $(54, \pm 3, 4)$, (16, 7, 16) qui, multipliées par 13, deviennent les trois classes de l'ordre (6, 2) du déterminant $-(39)^2 23$, qui correspondent à des formes cubiques du déterminant quadruple.

La classe (4.13, 39, 54.13) correspond à une classe cubique que l'on détermine au moyen des formules

$$8.13\,(2)^3 = t^2 + 207a^2,\ 4b - 3a = t,$$

$$2c - 3b + 27a = 0,\ 2d - 3c + 27b = 0.$$

Nous ne devons pas exiger que les deux nombres t, a soient premiers entre eux, parce que le premier coefficient 4 de la forme (4, 3, 54) n'est pas le double d'un nombre premier impair, comme le suppose le théorème que nous avons employé. On doit donc accepter les deux solutions $a = 1$, $t = \pm 25$; $a = 2$, $t = \pm 2$, qui donnent respectivement les deux formes cubiques (1, 7, −3, −99), (2, 2, −24, −63) dont le covariant quadratique commun est la forme (4.13, 39, 54.13). La forme opposée (4,13, −39, 54.13) correspond aux deux formes cubiques (1, −7, −3, 99), (2, −2, −24, 63) que l'on déduit des deux précédentes par le changement de y en $-y$.

De même en faisant $P = R = 8$, $Q = 7$ dans les formules (5) du n.° 103, on trouve les équations

$$26.8^2 = 8b^2 - 7ab + 8a^2,\ 8c - 7b + 8a = 0,\ 8d - 7c + 8b = 0,$$

dont les deux dernières exigent que b et c soient multiples de 8. Posant donc $b = 8l$, $c = 8m$, on a

$$26.8 = a^2 - 7al + 64l^2,\ 8m - 7l + a = 0,\ d - 7m + 8l = 0.$$

La première peut être remplacée par les deux suivantes

$$8.13.(2)^3 = t^2 + 207l^2,\ 2a - 7l = t,$$

dont la première a été résolue ci-dessus. Elle admet les deux solutions $l = 1$, $t = \pm 25$, $l = 2$, $t = \pm 2$. La première solution donne $a = -9$, $m = 2$, $d = 6$. Au moyen de la deuxième, on trouve $a = 6$, $m = 1$, $d = -9$. Ainsi deux formes cubiques improprement équivalentes

(− 9, 8, 16, 6) et (6, 16, 8, − 9)

correspondent au covariant (16.13, 7.13, 16.13).

En résumé, l'ordre quadratique dérivé (26, 2) du déterminant proposé renferme trois classes qui correspondent à des formes cubiques, savoir

(4,13, ± 39, 54.13), (16.13, 7.13, 16.13);

elles correspondent à six classes cubiques, opposées deux à deux, représentées par les six formes

$$(1, 7, -3, -99),\ (2, 2, -24, -63),\ (-9, 8, 16, 6),$$

$$(1, -7, -4, 99),\ (2, -2, -24, 63),\ (6, 16, 8, -9).$$

111. Les formes quadratiques des ordres dérivés (39, 1) (78, 2) du déterminant $-(39)^2.23$ se déduisent des formes primitives du déterminant -23 en les multipliant par 39. Ces formes dérivées se distribuent en trois classes pour chacun des deux ordres, savoir

$$(39, 39, 24.39), \quad (3.39, \pm 39, 8.39);$$

$$(2.39, 39, 12.39), \quad (6.39, \pm 39, 8.39).$$

Les formes quadratiques de l'ordre (39, 1) ne peuvent correspondre qu'à des formes cubiques du déterminant quadruple; mais celles de l'ordre (78, 2) peuvent correspondre soit à des formes cubiques du même déterminant, soit à des formes cubiques du déterminant quadruple. Nous nous occuperons d'abord des trois classes de l'ordre (39, 1). On peut les représenter par la formule $(39P, 39Q, 39.4R)$, où l'on prend successivement $P = Q = 1$, $R = 6$; $P = 3$, $Q = \pm 1$, $R = 2$. La classe cubique correspondante (a, b, c, d) se détermine au moyen des formules

$$39P^3 = t^2 + 23a^2,\ Pb - Qa = t,\ Pc - 2Qb + 4Ra = 0.$$

Soit d'abord $P = Q = 1$, $R = 6$. L'équation $39 = t^2 + 23a^2$ n'admet qu'un système de solutions, savoir $a = 1$, $t = \pm 4$.

$$1^\circ\ a = 1,\ t = 4;\ b = 5,\ c = -14,\ d = -148;$$

$$2^\circ\ a = 1,\ t = -4;\ b = -3,\ c = -30,\ d = 12.$$

soit en second lieu $P = 3$, $Q = 1$, $R = 2$. L'équation

$$39.27 = t^2 + 23a^2$$

admet les deux systèmes de solutions $a = 2$, $t = \pm 31$; $a = 6$, $t = \pm 15$ à l'aide desquels on obtient les deux formes cubiques

$$(2, 11, 2, -28), \quad (6, -3, -18, -4).$$

En changeant y en $-y$, on déduit de là les deux formes

$$(2, -11, 2, 28), \quad (6, 3, -18, 4)$$

qui ont pour covariant la forme $(3.39, -39, 8.39)$. Donc

Les formes cubiques dont les covariants quadratiques appartiennent à l'ordre dérivé (39, 1) du déterminant $-(39)^2 23$, sont distribuées en six classes représentées par les six formes

$$(1, 5, -14, -148), \quad (2, 11, 2, -28), \quad (6, -3, -18, -4),$$
$$(1, -3, -30, 12), \quad (2, -11, 2, 28), \quad (6, 3, -18, 4),$$

112. Nous avons employé la solution $a = 6$, $t = \pm 15$, quoiqu'elle soit formée de deux multiples de 3, parce que la valeur 3 de P ne remplit pas les conditions supposées dans les théorèmes où l'on exige que le produit mP^3 soit représenté proprement par la forme principale du déterminant δ. Pour satisfaire à ces conditions, nous aurions dû remplacer la forme (3, 8, 1) par la forme équivalente (31, 15, 8) dont le premier coefficient est un nombre premier non-diviseur de 39.23. Les formes cubiques auxquelles correspond le covariant quadratique (31.39, 15.39, 8.39) se déduisent des formules

$$39\,(31)^3 = t^2 + 23a^2, \quad 31b - 15a = t,$$
$$31c - 30b + 8a = 0, \quad 31d - 30c + 8b = 0.$$

La première admet les deux systèmes de solutions $a = 160$, $t = \pm 757$; $a = 184$, $t = \pm 169$, à l'aide desquelles on obtient les deux formes cubiques (160, 53, 10, −4), (184, 109, 58, 28). Le changement de y en $-y$ donne ensuite les deux formes cubiques (160, − 53, 10, 4), (184, − 109, 58, − 28) dont le covariant quadratique commun est la forme (31.39, − 15.39, 8.39). Mais si, dans les deux dernières formes cubiques on effectue la transformation (1, 0; − 2, 1) qui change la forme (31, 15, 8) en la forme équivalente (3, 1, 8) on obtient les deux formes − (6, − 3 − 18, − 4), (2, 11, 2, − 28). On retrouve ainsi les deux classes qui ont été obtenues précédemment par un calcul plus simple.

113. Les trois classes de l'ordre (78, 2) correspondent à des formes cubiques du déterminant $-(39)^2.23$, que l'on déduit, par l'application de la règle du n° 70, de celles que nous avons trouvées précédemment, n° 111, pour le déterminant quadruple. On obtient ainsi les six classes cubiques, opposées deux à deux,

$$(2, 5, 7, -37), \quad (2, -3, -15, 3), \quad (4, 11, 1, -7),$$
$$(4, -11, 1, 7), \quad (12, -3, -9, -1), \quad (12, 3, -9, 1).$$

Les trois classes quadratiques de l'ordre (78, 2) correspondent aussi à des formes cubiques du déterminant quadruple − 4.34983. Les formules

$$8.39 = t^2 + 23a^2,\ 2b - a = t,\ c - b + 6a = 0,\ d - c + 6b = 0$$

déterminent les classes cubiques du déterminant quadruple, qui correspondent à la classe quadratique (2.39, 39, 12.39). On vérifie la première en prenant $a = 1$, $t = \pm 17$.

$$1^\circ \quad a = 1, \quad t = 17; \quad b = 9, \quad c = 3, \quad d = -51;$$

$$2^\circ \quad a = 1, \quad t = -17; \ b = -8, \ c = -14, \ d = 34.$$

Ainsi la classe dérivée 39(2, 1, 12) correspond à deux classes cubiques représentées par les deux formes

$$(1,\ 9,\ 3,\ -51), \quad (1,\ -8,\ -14,\ 34)$$

De même la classe dérivée 39(6, 1, 4) correspond à deux classes cubiques déterminées par les formules

$$8.39.27 = t^2 + 23a^2,\ 6b - a = t, \quad 3c - b + 2a = 0,\ 3d - c + 2b = 0,$$

La première admet les deux systèmes de solutions $a = 19$, $t = \pm 11$; $a = 15$, $t = \pm 17$, au moyen desquelles on obtient les deux formes cubiques

$$(19,\ 5,\ -11,\ -7), \quad (15,\ 12,\ -6,\ -10),$$

dont le covariant quadratique est la forme (6.39, 39, 4.39). La substitution (1, 0 ; 0, − 1) donne ensuite les deux formes

$$(19,\ -5\ -11,\ 7), \quad (15,\ -12,\ -6,\ 10)$$

qui correspondent à la forme opposée (6.39, − 39, 4.39).

En réunissant les divers résultats obtenus relativement à la valeur considérée de Δ, on obtient la conclusion suivante:

Les formes cubiques du déterminant − 34983 sont distribuées en neuf classes représentées par les neuf formes

$$(0,\ 1,\ 1,\ -8745), \quad (30,\ 19,\ 5,\ -3) \quad (30\ -19,\ 5,\ 3),$$

$$(2,\ 5,\ -7,\ -37), \quad (4,\ 11,\ 1,\ -7), \quad (12,\ -3,\ -9,\ -1),$$

$$(2,\ -5,\ -7,\ 37), \quad (4,\ -11,\ 1,\ 7), \quad (12,\ 3,\ -9,\ 1);$$

celles du déterminant quadruple -4.34983 sont distribuées en vingt sept classes représentées par les formes suivantes :

(0, 1, 2, − 34980), (15, 19, 10, − 12), (15, − 19, 10, 12) ;

(13, − 2, − 14, − 2), (49, 12, − 6, − 6), (7.18, 6, − 6),

(13, 2, − 14, 2), (49, − 12, − 6, 6), (7, − 18, 6, 6) ;

(1, 7, − 3, − 99), (2, 2, − 24, − 63), (− 9, 8, 16, 6),

(1, − 7, − 3, 99), (2, − 2, − 24, 63), (6, 16, 8, − 9);

(1, 5, − 14, − 148), (2, 11, 2, − 28), (6, − 3, − 18, − 4),

(1, − 5, − 14, 148), (2, − 11, 2, 28), (6, 3, − 18, 4).

(1, 9, 3, − 51), (19, 5, − 11, − 7), (15, 12, − 6, − 10),

(1, − 9, 3, 51), (19, − 5, − 11, 7), (15, − 12, − 6, 10).

$$\Delta = m^2 \delta = -(8l+3)\,;\quad D = 4\Delta \text{ et } D = \Delta.$$

114. Soit $\delta = -59$. Nous avons vu (n° 57) que le déterminant -59 offre neuf classes quadratiques formant une période unique :

$$L = (3,\ 1,\ 20),\quad L^2 = (7,\ -5,\ 12),\quad L^3 = (4,\ 1,\ 15),$$

$$L^4 = (5,\ -1,\ 12),\quad L^6 = (4,\ -1,\ 15),\quad L^9 = (1,\ 0,\ 59).$$

Les trois classes (1, 0, 59); (4, ± 1, 15) sont les seules qui s'obtiennent par triplication. C'est donc par l'une de ces classes que le nombre m doit être représenté pour que le produit de ce nombre multiplié par le cube d'un nombre premier soit représenté proprement par la classe principale (1, 0, 59). Or nous avons rappelé (n. 101) qu'une dérivée (mP, mQ, mR) ne peut correspondre à une forme cubique qu'autant que le produit mP^3 est représenté proprement par la forme principale du déterminant $\delta = Q^2 - PR$. Si donc le nombre m est l'un des nombres premiers (ou puissance de nombres premiers) représentés par les trois formes

$$3x^2 + 2xy + 10y^2,\quad 5x^2 + 2xy + 12y^2,\quad 7x^2 + 4xy + 9y^2,$$

tels que 3, 5, 7, 11, 19, 43,... aucune classe quadratique de l'ordre dérivé (m, 1) du déterminant $-m^2.59$ ne correspond à des formes cubiques. Si

au contraire le nombre m est représenté par l'une des deux formes $x^2 + 59y^2$, $4x^2 + 2xy + 15y^2$, l'ordre $(m, 1)$ du déterminant $-59m^2$ correspond à des formes cubiques du déterminant quadruple.

Si le nombre m est représenté par la forme $(1, 0, 59)$, les classes de l'ordre $(m, 1)$ obtenues en multipliant par m les classes proprement primitives dont la triplication donne la classe principale $(1, 0, 59)$, correspondent à des classes cubiques du déterminant quadruple. Si le nombre m est représenté par la forme $(4, 1, 15)$, des classes cubiques du déterminant $-4m^2.59$ correspondent aux classss dérivées obtenues en multipliant par m les classes proprement primitives dont la triplication produit les deux classes $(4, \pm 1, 15)$. Les classes dont la triplication produit la classe $(1, 0, 59)$ sont les trois classes $(4, \pm 1, 15)$, $(1, 0, 59)$; celles dont la triplication donne les deux classes $(4, \pm 1, 15)$ correspondent à des indices ϖ déterminés par les deux congruences

$$3\varpi \equiv 3; \quad 3\varpi \equiv 6 \pmod{9},$$

dont les racines sont $\varpi = 1, 4, 7; 2, 5, 8$. Ces classes sont représentées par les six formes

$$(3, \pm 1, 20), \ (7, \pm 5, 12), \ (5, \pm 1, 12).$$

115. Soit par exemple $m = 17$. Comme ce nombre est représenté exclusivement par les deux classes $(4, \pm 1, 15)$, les seules classes dérivées de l'ordre $(17, 1)$ du déterminant $-(17)^2.59$ qui correspondent à des classes cubiques, sont celles qu'on obtient en multipliant par 17 les formes renfermées dans les six classes précédentes. Si l'on désigne l'une de ces formes dérivées par $17(P, Q, 4R)$, les formes cubiques dont elle est le covariant quadratique sont déterminées par les formules suivantes :

$$17P^3 = t^2 + 59a^2, \qquad Pb - Qa = t,$$

$$Pc - 2Qb + 4Ra = 0, \quad Pd - 2Qc + 4Rb = 0.$$

Pour la classe $17(3, 1, 20)$ on fera $P = 3$, $Q = 1$, $R = 5$. On aura d'abord à résoudre l'équation

$$17.27 = t^2 + 59a^2,$$

qui n'admet que le système suivant $a = 1$, $t = \pm 20$, au moyen duquel on déduit des autres formules $b = 7$, $c = -2$, $d = -48$.

Pour la classe $(7.17, 5.17, 12.17)$ on fera $P = 7$, $Q = 5$, $R = 3$, et l'on obtiendra la classe cubique $(5, 13, 10, -8)$.

Enfin pour la classe (5.17, 17, 12.17) on fera $P = 5$, $Q = 1$, $R = 3$, et l'on obtiendra la classe cubique $(6, 1, -14, -8)$. Le changement de y en $-y$ donnerait ensuite les trois classes qui correspondent aux covariants quadratiques renfermés dans les trois classes

$$17(3, -1, 10), \quad 17(7, -5, 12), \quad 17(5, -1, 12).$$

On conclut de là que le déterminant $-4(17)^2.59$ présente six classes cubiques dont les covariants appartiennent à l'ordre dérivé (17, 1) du déterminant $-(17)^2.59$; ces six classes sont représentées par les six formes

$$(1, 7, -2, -48), \quad (5, 13, 10, -8), \quad (6, 1, -14, -8),$$

$$(1, -7, -2, 48), \quad (5, -13, 10, 8), \quad (6, -1, -14, 8),$$

116. Les classes de l'ordre dérivé $(2m, 2)$ du déterminant $-m^2 59$ s'obtiennent en multipliant par m les classes improprement primitives du déterminant -59; elles sont au nombre de 3, représentées par les trois formes

$$(2m, m, 30m), \quad (6m, \pm m, 10m).$$

Pour que la première classe corresponde à des formes cubiques, il faut que l'on puisse résoudre l'équation

$$4m = t^2 + 59a^2$$

en nombres entiers t, a n'ayant pas de diviseur commun autre que 2. Si t et a sont pairs, le nombre m doit être représenté par la forme principale; si t et a sont impairs, le nombre m doit être représenté par la forme (4, 1, 15). Si donc le nombre m n'est représenté par aucune des deux formes (1, 0, 59), (4, 1, 15), ainsi que cela a lieu pour les nombres premiers représentés par les formes (3, 1, 20), (5, 1, 12), (7, 2, 9), la classe dérivée $(2m, m, 30m)$ ne correspond à aucune forme cubique.

Pour que la forme $(6m, m, 10m)$ soit la forme déterminante d'une forme cubique, il faut que l'on puisse résoudre l'équation

$$4.27.m = t^2 + 59a^2$$

en nombres entiers t, a n'ayant aucun diviseur commun autre que 2. Or les représentations propres du nombre 27 par les formes du déterminant

-59 appartiennent aux deux classes $(4, \pm 1, 15)$; celles du produit 4.27 appartiennent aux trois classes $(4, \pm 1, 15)$, $(1, 0, 59)$. Si donc le nombre m n'est pas représenté par l'une des deux classes $(1, 0, 59)$, $(4, 1, 15)$ la classe dérivée $(6m, m, 10m)$ ne correspond à aucune classe cubique.

En joignant ce résultat au précédent, on conclut que la condition nécessaire pour que l'ordre dérivé $(2m, 2)$ du déterminant $-59m^2$ corresponde à des formes cubiques, est que le nombre m soit représenté par l'une des deux formes $(1, 0, 59)$, $(4, 1, 15)$. Si donc le nombre m est un nombre premier (ou une puissance d'un nombre premier) représenté par l'une des trois formes $(3, 1, 20)$, $(5, 1, 12)$, $(7, 2, 9)$, aucune forme de l'ordre dérivé $(2m, 2)$ du déterminant $-59m^2$ ne correspond à des formes cubiques.

117. Soit $m = 17$. Comme ce nombre est représenté par la forme $(4, 1, 15)$, les trois classes dérivées

$$17(2, 1, 30), \quad 17(6, 1, 10), \quad 17(6, -1, 10)$$

correspondent à des classes cubiques que l'on détermine au moyen des formules

$$4.27P^3 = t^2 + 59a^2, \quad 2Pb - Qa = t,$$

$$Pc - Qb + Ra = 0, \quad Pd - Qc + Rb = 0.$$

en prenant successivement $P = Q = 1$, $R = 15$; $P = 3$, $Q = 1$, $R = 5$. Dans le premier cas on trouve deux solutions:

$$1^\circ \quad a = 1, \quad t = 3, \quad b = 2, \quad c = -13, \quad d = -43.$$

$$2^\circ \quad a = 1, \quad t = -3; \quad b = -1, \quad c = -16, \quad d = -1.$$

Dans le second cas l'équation

$$4.17(3)^3 = 1836 = t^2 + 59a^2$$

admet deux systèmes de solutions: $a = 2$, $t = \pm 40$; $a = 5$, $t = \pm 19$. On démontre aisément qu'il n'y a pas d'autre solution satisfaisant à la double condition que a soit positif et que les deux nombres a, t n'aient pas de diviseur commun autre que 2. On a d'abord

$$a^2 < \frac{1836}{59} < 32, \quad a < 6.$$

De plus la congruence relative au module 5 exclut les deux valeurs 1 et 4; car en faisant $a \equiv \pm 1$ (mod. 5), on trouve

$$1 \equiv t^2 + 1, \quad 2 \equiv t^2 \pmod{5}$$

ce qui est impossible; parce que 2 est non-résidu quadratique de 5. On doit aussi exclure la valeur $a = 3$, parce qu'elle exige que t soit aussi multiple de 3. Par conséquent il ne reste que les deux valeurs 2 et 5 auxquelles correspondent les solutions indiquées:

$$1^\circ \quad a = 2, \quad t = \pm 40; \quad b = 7, \quad c = -1, \quad d = -12;$$

$$2^\circ \quad a = 5, \quad t = \pm 19; \quad b = -4, \quad c = -7, \quad d = 9.$$

On conclut de là que le déterminant $-(17)^2 59$ présente six classes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre dérivé, obtenu en multipliant par 17 les formes improprement primitives du déterminant -59. Ces six classes sont représentées par les six formes

$$(1,\ 2,\ -13,\ -43),\quad (2,\ 7,\ -1,\ -12),\quad (5,\ -4,\ -7,\ 9),$$

$$(1,\ -1,\ -16,\ -1),\quad (2,\ -7,\ -1,\ 12),\quad (5,\ 4,\ -7,\ -9).$$

Pour compléter la classification des formes cubiques du déterminant $-(17)^2 59$, il faudrait chercher les classes cubiques qui correspondent à l'ordre improprement primitif. Cette recherche s'effectue comme dans le cas où le déterminant n'est divisible par aucun carré.

118. Comme dernier exemple nous prendrons $\Delta = -243 = -3.81$. Comme ce nombre est divisible par un bicarré, 81, les formes cubiques de chacun des deux déterminants Δ et 4Δ se partagent en deux ordres, l'ordre primitif et l'ordre dérivé, relatif au multiplicateur 3. Ces formes dérivées s'obtiennent en multipliant par 3 les coefficients des formes cubiques du déterminant -3 et du déterminant -12. Or nous avons vu (n° 32) que les formes cubiques du déterminant -3 se distribuent en trois classes représentées par les trois formes

$$(0,\ 1,\ 1,\ 0),\quad (1,\ 0,\ -1,\ -1),\quad (1,\ 1,\ 0,\ -1).$$

Par conséquent les formes cubiques dérivées du déterminant -243 sont renfermées dans les trois classes représentées par les trois formes

$$(0,\ 3,\ 3,\ 0),\quad (3,\ 0,\ -3,\ -3),\quad (3,\ 3,\ 0,\ -3).$$

De même les formes cubiques dérivées, du déterminant -4.243 se déduisent de celles du déterminant -12 en les multipliant par 3. Or celles-ci sont renfermées dans une seule classe représentée par la forme $(0, 1, 2, 0)$. Les premières sont donc aussi renfermées dans une seule classe représentée par la forme $(0, 3, 6, 0)$.

Les classes cubiqnes primitives de chacun des deux détèterminants -243, -4.243 se partagent en divers groupes suivant l'ordre auquel appartiennent leurs formes déterminantes. L'ordre quadratique proprement primitif du déterminant -243 se compose de neuf classes représentées par les neuf formes

$$(1, 1, 244), \quad (4, \pm 1, 61), \quad (13, \pm 2, 19),$$

$$(7, \pm 3, 36), \quad (9, \pm 3, 28).$$

Au contraire l'ordre improprement primitif se compose de trois classes seulement, représentées par les trois formes

$$(2, 1, 122), \quad (14, \pm 3, 18).$$

Le determinant -243 est irrégulier; les classes proprement primitives sont toutes renfermées dans quatre périodes de trois termes seulement, de sorte que chacune d'elles produit par triplication la classe principale. Une classe cubique, et une seule, correspond à chacune de ces neuf classes. Les classes cubiques qui correspondent aux trois classes $(1, 1, 244)$, $(4, \pm 1, 61)$ se déduisent (n° 88) des formules

$$(0, 1, 2, 3 + \Delta), \left(0, 2, \pm 1, \frac{3 + \Delta}{8}\right)$$

en faisant $\Delta = -243$. On trouve ainsi les trois classes

$$(0, 1, 2, -240), \quad (0, 2, 1, -30), \quad (0, 2, -1, -30).$$

La forme cubique dont le covariant quadratiqus est la forme $(13, 2, 19)$ se déduit des formules

$$(13)^3 = t^2 + 243a^2, \qquad 13b - 2a = t$$

$$13c - 4b + 19a = 0, \qquad 13d - 4c + 19b = 0.$$

On vérifie la première en prenant $a = 2$, $t = \pm 35$; puis les autres donnent $b = 3$, $c = -2$, $d = -5$.

Pour la forme (7, 3, 36) on a les équations

$$343 = t^2 + 243a^2, \quad 7b - 3a = t,$$

$$7c - 6b + 36a = 0, \quad 7d - 6c + 36b = 0,$$

dont la première se résout au moyen des valeurs $a = 1$, $t = \pm 10$; les suivantes donnent ensuite $b = -1$, $c = -6$, $d = 0$.

Enfin on obtient la forme cubique qui correspond à la forme (9, 3, 28) au moyen des formules

$$9^3 = t^2 + 243a^2, \quad 9b - 3a = \pm t, \quad 9c - 6b + 28a = 0, \quad 9d - 6c + 28b = 0;$$

on trouve ainsi les deux formes équivalentes $\pm$ (0, 3, 2, − 8).

En résumé, les formes cubiques dont les formes déterminantes appartiennent à l'ordre proprement primitif du déterminant − 243, sont au nombre de neuf représentées par les formes

(0, 1, 2, − 240), (0, 2, 1, − 30), (0, 2, − 1, − 30);

(1, − 1, − 6, 0), (2, 3, − 2, − 5), (0, 3, 2, − 8).

(1, 1, − 6, 0), (2, − 3, − 2, 5), (0, 3, − 2, − 8).

119. Les trois classes quadratiques improprement primitives

(2, 1, 122), (14, $\pm$ 3, 18)

correspondent chacune à une classe cubique du déterminant − 243, et à une seule. Ces trois classes cubiques se déduisent de celles du déterminant quadruple − 4.243 qui correspondent aux trois classes (1, 1, 244), (7, $\pm$ 3, 36), en appliquant la règle du n. 70. On obtient ainsi les trois classes

(0, 1, 1, − 60), (2, − 1, − 3, 0), (2, 1, − 3, 0).

Aucune forme quadratique des deux ordres dérivés (3, 1), (6, 2) du déterminant − 243 ne correspond à des formes cubiques. En effet, ces formes dérivées se déduisent des formes primitives du déterminant − 27 en les multipliant par 3. Or le déterminant − 27 ne présente que quatre classes quadratiques primitives, savoir trois classes proprement primitives représentées par les trois formes (1, 1, 28), (4, $\pm$ 1, 7), et une classe improprement primitive (2, 1, 14). Par conséquent l'ordre dérivé (3, 1) est composé des trois classes (3, 3, 3.28), (12, $\pm$ 3, 21), et l'ordre dérivé (6, 2) consiste

dans la classe unique (6, 3, 42). Si quelqu'une de ces classes correspondait à des formes cubiques, on pourrait résoudre en nombres entiers l'une des équations suivantes

$$3 = t^2 + 27a^2, \quad 3.7^3 = t^2 + 27a^2, \quad 12 = t^2 + 27a^2$$

lesquelles sont évidemment impossibles. Par conséquent aucune forme cubique ne correspond à ces formes quadratiques dérivées.

Les deux ordres quadratiques dérivés (9, 1), (18, 2) du déterminant -81.3 sont représentés respectivement par les deux classes

$$(9, 9, 36), \quad (18, 9, 18),$$

que l'on obtient en multipliant par 9 les deux classes

$$(1, 1, 4), \quad (2, 1, 2)$$

du déterminant -3. Ces deux classes correspondent aux formes cubiques dérivées que nous avons trouvées plus haut (n° 118). On constate aisément qu'elles ne correspondent pas à des formes cubiques primitives; car les formes cubiques qui correspondent aux deux formes déterminantes (9, 9, 36), (18, 9, 18) sont déterminées par les deux systèmes d'équations

$$9 = (a-b)^2 + 3a^2, \quad c - 2b + 4a = 0, \quad d - 2c + 4b = 0;$$

$$36 = (2b-a)^2 + 3a^2, \quad c - b + a = 0, \quad d - c + b = 0.$$

Or on voit immédiatement que chacun de ces deux systèmes exige que les quatre nombres (a, b, c, d) soient divisibles par 3. Par conséquent les deux classes dérivées (9, 9, 36), (18, 9, 18) ne correspondent qu'à des formes cubiques dérivées dont les classes ont été obtenues ci-dessus.

COMUNICAZIONI.

Grassi Landi, Mons. B. – *Presentazione di una sua Memoria.* (1)

Il ch. Mons. Bartolomeo Grassi Landi presentò una sua memoria in confutazione di certi errori pubblicati in occasione della Conferenza internazionale di Vienna per l'adozione di un corista uniforme: errori circa i veri principii di acustica e specialmente intorno alla legge delle vibrazioni medesime in ordine al tempo.

Lais P. G. – *Presentazione di un suo lavoro:*

Il ch. P. Giuseppe Lais presentò all'Accademia un recente suo lavoro a stampa intitolato « Atlante meteorico, ossia riassunto grafico generale delle » variazioni atmosferiche del clima di Roma compilato sulle statistiche degli » osservatorii urbani »; e diè resoconto del contenuto in questa sua opera.

Boncompagni, D. B. – *Presentazioni diverse:*

D. B. Boncompagni presenta all'Accademia l'originale manoscritto d'un lavoro del P. Teofilo Pepin, Socio corrispondente dell'Accademia stessa, intitolato: « *Théorie des fonctions homogènes, Deuxième Mémoire* », già inserito in questo fascicolo.

Presenta da parte degli autori le seguenti pubblicazioni:

I VIAGGI E LA CARTA || DEI FRATELLI ZENO VENEZIANI || (1390–1403) || STUDIO SECONDO. In 8°, di 33 pagine, nell'ultima delle quali (lin. 38) si legge: « C. DESIMONI, » e sulla cui 1ª copertina si legge: « ESTRATTO || DALL'ARCHIVIO STORICO || ITALIANO. »

DELLE ESPLOSIONI FULMINANTI || DELLE MACCHINE A VAPORE || E DI UN MODO || DI PREVENIRLE E DI FACILITARE L'EBBOLLIZIONE DEI LIQUIDI || con risparmio di combustibile || MEMORIA || DI || GIOVANNI LUVINI || Ingegnere Professore di Fisica || Via Carlo Alberto, 36, Torino || ESTRATTO dagli Atti della Società degli Ingegneri || e degli Industriali di Torino, || TORINO || TIPOGRAFIA SALESIANA || 1885. In-f°, di 11 pagine.

Sur quelques conséquences de la formule de Green || *et sur la théorie du potentiel*; || Par M. Ph. Gilbert, || Professeur à l'Université de Louvain. In-4°, di 14 pagine nell'ultima delle quali (lin. 22–23) si legge: « Extrait » du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ª série, t. X, » décembre 1884. – 10651. Paris. – Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des » Grands-Augustins. »

Presenta anche un esemplare di ciascuna delle pubblicazioni seguenti:

SOCIETA' METEOROLOGICA ITALIANA || BOLLETTINO DECADICO || PUBBLICATO PER CURA ||

(1) Questo lavoro è pubblicato nel vol. II, delle *Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.*

DELL' OSSERVATORIO CENTRALE || DEL || REAL COLLEGIO CARLO ALBERTO || IN MONCALIERI || Anno XIV, || 1884-85 || N.° 4. – Marzo 1885. In-f.°

SOCIETA' METEOROLOGICA ITALIANA || BOLLETTINO MENSUALE || PUBBLICATO PER CURA || DELL' OSSERVATORIO CENTRALE || DEL REAL COLLEGIO CARLO ALBERTO IN MONCALIERI || Serie II, Vol. V, Num. VIII. || *Agosto* 1885. || TORINO || Collegio degli Artigianelli. – Tipografia S. Giuseppe. || *Corso Palestro, N.* 14. || 1885. In-f.°

BULLETTINO || DI || BIBLIOGRAFIA E DI STORIA || DELLE || SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || PUBBLICATO || DA B. BONCOMPAGNI ecc. || TOMO XVI || INDICE DEGLI ARTICOLI E DEI NOMI || ROMA ecc. || 1883. — TOMO XVII. SETTEMBRE, OTTOBRE, NOVEMBRE, DICEMBRE 1884. — TOMO XVIII. GENNAIO-FEBBRAIO 1885.

Jahrbuch || über die || Fortschritte der Mathematik || im Verein mit anderen Mathematikern || und unter besonderer Mitwirkung der Herren || Felix Müller, und Albert Wangerin || herausgegeben || von || Carl Ohrtmann. || Vierzehnter Band. || Jahrgang 1882. || Berlin. || Druck und Verlag von Georg Reimer || 1885. 3 fascicoli, in-8.°

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI || Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. || Seduta del 29 novembre 1885. || DOCUMENTI RIGUARDANTI FEDERICO CESI || NOTA || DEL SOCIO || ENRICO NARDUCCI || ROMA || TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DE LINCEI || PROPRIETA' DEL CAV. V. SALVIUCCI || 1885. In-4.° di 8 pp., e contenente vari documenti inediti intorno a Federico Cesi, uno dei quali dimostra ch'egli fu battezzato in Roma, nella chiesa de'SS. Simone e Giuda il 13 di marzo del 1585, e tenuto a Battesimo da Jacopo Boncompagni e da Donna Maria Pimentel, moglie di Enrico Guzman, conte di Olivares, Ambasciatore di Spagna presso la S. Sede.

CASTRACANE Conte Ab. F. – *Presentazione di una sua nota*:

Il ch. sig. Presidente Conte Ab. F. Castracane partecipò all'Accademia un'interessante scoperta su le Diatomee fatta ultimamente nel lago di Como dal conte Gaetano Barbò di Milano. Questo signore già conosciuto quale distinto cultore della Storia naturale, trovandosi a Bellagio, volle tentare una pesca di Diatomee pelagico-lacustri, con far rimorchiare un piccolo retino di velo di seta alla superficie del lago. Il risultato, se non fu ricco per varietà di tipi, fu però interessantissimo per la cattura di molti esemplari di *Rhizosolenia Eriensis*, N. L. Sm. Con questo si ottenne eclatante realizzazione del prognostico formulato dal Riferente, allorchè nella Sessione VI.ª dell'anno XXXV.°, in data 21 maggio 1882, presentò all'Accademia l'analisi di un saggio di scandaglio tratto dalla profondità di 400 metri nel medesimo lago di Como dal ch. Dr. Casella. In quella circostanza, dai numerosi esemplari di *Fragilaria*

Crotonensis, forma nuova all'Italia, notata dal prof. Brun di Ginevra nel lago Lemano e in due altri laghi svizzeri, riconosciuta nel lago di Bracciano dal Dr. Lanzi, non solo arguì all'esistenza di distinta flora pelagico-lacustre, ma poggiato su la presenza della medesima Diatomea nel lago Erié, prognosticò che quella flora si sarebbe riconosciuta comune a tutti i laghi di qualsiasi parte del mondo. La singolarissima *Rhizosolenia Eriensis* scoperta dal ch. Barbò nel lago di Como, sin ora nota soltanto nel luogo di origine, è la conferma della suaccennata previsione; e ci dà argomenti a sperare l'incontro di altre forme rarissime o anche nuove fra le Diatomee di acqua dolce. Il gentilissimo sig. conte Gaetano Barbò si farà un pregio di comunicare liberalmente un saggio della preziosa raccolta a chiunque ne indirizzerà domanda a Milano, via s. Damiano, 24.

De Rossi, prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo del D.r G. Terrigi*:

Il prof. M. S. de Rossi, a nome del Dr. Guglielmo Terrigi, presentò all'Accademia il recente opuscolo di questo autore, intitolato *Ricerche microscopiche fatte sopra frammenti di marna inclusi nei peperini laziali*, esponendo i pregi del lavoro e ragionando sulla ipotesi colla quale egli conclude, che cioè al colore ed ai materiali componenti il peperino abbiano largamente contribuito gli elementi delle marne plioceniche, la cui fauna fossile è abbondantemente rappresentata nei massi interclusi in questa roccia vulcanica. Da questo punto il De Rossi prese a svolgere alcune sue speciali considerazioni ed osservazioni sulla struttura dei peperini laziali. Egli lodò l'analisi del Terrigi come parte di un più esteso studio da farsi sulle molte varietà delle roccie interclusc nel peperino, che rivelano epoche e stati geologici diversi, che si trovano al di sopra dei focolari vulcanici laziali. Mostrò anche come per mezzo dello studio del metamorfismo subìto dagli interclusi suddetti, si risolva la vecchia questione sulla classificazione dei peperini fra le lave o fra i fanghi vulcanici. Da brevi cenni su questo punto fece risultare, che i peperini, appartenendo ai fanghi propriamente detti, furono però in alcune emissioni dotati di temperature altissime, che li avvicinavano alle lave, ed in altre ebbero temperature relativamente bassissime, che li assomigliavano ai semplici tufi.

De Rossi, prof. M. S. – *Prosentazioni diverse*:

Il Segretario presentò da parte del socio corrispondente prof. L. Cerebotani due note manoscritte, 1a, circa il rapporto fra corda ed arco, 2a, sulla forma del pendolo, che verranno inserite nel prossimo fascicolo.

Il medesimo segretario presentò da parte degli autori soci corrispondenti le memorie a stampa che seguono:

Mazzetti e Pantanelli — Cenno monografico intorno alla fauna fossile di Montese. Parte prima.

Ragona prof. Domenico — Il santuario della B. V. in Fiorano e la sua altitudine sul livello del mare.

Perry P. S. I. — Stonyhurst College observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1884.

Carnoy I. — Cours de Géométrie analytique. Géométrie plane.

Catalan T. Ch. — Mélanges mathématiquess — Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli. — Questions d'analyse indéterminée. — Une récréation arithmétique. — Rapport sur certains développements en série, par M. I. Deruyts.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE.

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. — P. F. S. Provenzali — Dott. M. Lanzi. — P. G. Foglini. — P. G. Lais. — Princide D. B. Boncompagni. — Prof. L. Ladelci. — Cav. A. Statuti.

CORRISPONDENTI: Mons. B. Grassi-Landi. — Prof. A. De Andreis.

AGGIUNTI: Marchese Ing. L. Fonti.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1884. — Berlin, 1885, in-4°
2. *Actas de la Academia Nacional de ciencias en Córdoba*. — T. V. — Entr. 2. — Buenos Aires, 1884, in-4°
3. *Annuaire de l'Académie royale des sciences de Belgique*, 1884, 1885. Bruxelles, 1884, 1885. in-8.° piccolo.
4. *Annuaire de la Société académique Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse*. — A. 1884—85. Toulouse, 1884, in-8.°
5. *Annual Report of the Smithsonian Institution*, 1863—70, 1873—76, 1878—82. Washington, 1863—82, in-8.°
6. *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Roma*. — A. IX, fasc. 1°, 2°. — Roma, 1885, in-8°
7. *Atti della Accademia Olimpica di Vicenza*. — Vol. XVIII. — Vicenza, 1882. In-8°
8. *Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*. — Serie 3ª, T. XVIII. — Catania, 1885. In-4°
9. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. Vol. XX, disp. 7, 8. Torino, 1885, in-8°
10. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXII, 1884-85. — Serie quarta. — Rendiconti. — Vol. I, fasc. 13—15, 17—27. — Roma, 1885, in-4.°
11. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXI, 1883-84. Serie terza. — Memorie. Vol. XVIII. — Roma, 1884, in-4°

12. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. III. — Serie VI. — disp. 3. —10. — Venezia, 1884—85, in-8°.
13. BEGOUEN. — *La vibration vitale.* — Tours, 1885, in-8° piccolo.
14. *Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handligar. Sjette bandet, Häfte 1, 2: Sjunde Bandet, Häfte 1, 2: Attonde Bandet, Häfte 1, 2.* — Stockholm, 1880—84, in-8.°
15. *Bollettino dell' Osservatorio della Regia Università di Torino.* — A. XIX (1885). Torino, 1885. In-4.°
16. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXIX, — n.° 4. — T. XXX, n. 1. — 1885. In-4.°
17. *Bulletins de l'Académie royale des sciences de Belgique.* — T. VI, 1883. T. VII, 1884, T. VIII, 1884. — Bruxelles 1883, 1884, in-8.°
18. *Bulletin de la Société Franco-Hispano-Portugaise de Toulouse.* To. V, n. 3, 4. To. VI, n. 1. Toulouse 1884, 1885, in-8°.
19. *Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1884. — n.° 1—3. — Moscou, 1885. In-8°.
20. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. XI, n.° 4—6. — Roma, 1885, in-8°.
21. *Bullettino della Società Entomologica italiana.* — A. XVII, Trim. 1—4. Firenze, 1885, in-8.°
22. *Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XV, indice T. XVII, Settembre—Dicembre 1884: T. XVIII, Gennaio, Febbraio 1885. — Roma, 1884, 1885, in-4°.
23. CARNOY (J.) — *Cours de Géométrie analytique.* — Louvain-Paris, 1886, in 8.°
24. CATALAN (E.) — *Mélanges mathématiques.* — T. 1. — Bruxelles, 1885, in-8°.
25. —— *Une récréation arithmétique.* — Bruxelles, 1885, in-8°.
26. —— *Questions d'analyse indéterminée.* — Bruxelles, 1885, in-8°.
27. —— *Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli.* — Rome, 1885, in-4°.
28. —— *Sur certains développements en séries,* par M. J. Deruyts: Rapport. — Bruxelles, 1885, in-8°.
29. *Catalogo dos manuscriptos do Instituto historico e geographico Brasileiro.* — Rio de Janeiro, 1884, in-8.°
30. CHARRIER (A.) — *Effemeridi del Sole, della Luna, etc., per l'anno 1886.* — Torino.
31. —— *Sulla frequenza dei venti inferiori.* — Torino, 1885, in-8.°
32. *Crónica científica.* — A. VIII. — n. 181—192. — Barcelona, 1885, in-8.°
33. DE BRITO CAPELLO (J. C.) — HILDEBRAND HILDEBRANDSSON (H.) — *Rapport au comité météorologique international.* — Lisbonne et Upsala, 1885, in-8.°
34. *Decimo anniversario della Società toscana di scienze naturali e cinquantesimo d'insegnamento del Prof. Giuseppe Meneghini.* — Pisa, 1885, in-4.°
35. DE SIMONI (C.) — *I viaggi e la carta dei fratelli Zeno veneziani.* — *Studio secondo.*
36. DORNA (A.) — *Osservazioni dell' ecclisse totale di Luna del 4—5 Ottobre 1884.* — Torino, 1884, in-8.°
37. —— *Sulla possibilità che il Vulcano di Krakatoa possa avere proiettate materie fuori dell'atmosfera.* — Torino, 1884, in-8.°
38. GILBERT (Ph.) — *Sur quelques conséquences de la formule de Green et sur la théorie du potentiel.* — Paris, 1884, in-4.°
39. GOVI (G.) — *L'ottica di Claudio Tolomeo.* — Torino, 1885, in-8.°
40. *Jahrbüch über die Fortschritte der Mathematik, etc.,* — Jahr, 1882. — Heft. 2, 3. — Jahr 1883, Heft 1. — Berlin. 1885, in-8.°
41. *Jahreshefte des Vereins fur vaterländische Naturkunde in Württemberg.* — Stuttgart, 1885. In-8.°
42. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales for* 1884. Vol. XVIII. Sydney, 1885. In-8.°
43. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII. — n.° 6, 7. — St. Pétersbourg, 1885, in-8°.

44. *Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 1880, 1881. Stockholm, 1881, 1882, in-4.°
45. KLUK-KLUCZYCKI, (V. P.) — *Umsturz Irrthümlicher Schullehren.* Krakau, 1885, in-8.°
46. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosesto. — Serie XII, Vol. XI, quad. 841—845: Vol. XII, quad. 847—851. — Firenze, 1885, in-8.°
47. LAIS (P. G.) — *Atlante meteorico.* — Roma, 1885, in-4.°
48. LUVINI (G.) — *Delle esplosioni fulminanti delle macchine a vapore.* — Torino, 1885, in-4°
49. MAZZETTI (G.) e PANTANELLI (D.) — *Cenno monografico intorno alla fauna fossile di Montese.* — Parte prima. — Modena, 1885, in-8.°
50. *Mémoires couronnés et autres mémoires publiées par l'Académie royale des sciences etc. de Belgique.* — T. XXXVI, — Bruxelles, 1884, in 8.°
51. *Mémoires de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique* — T. XLV, XLVI. — Bruxelles, 1884, in-4.°
52. *Mémoire de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg.* — T. XXIV. — Paris-Cherbourg. 1884, in-8.°
53. *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.* — II^e Série, T. XII. — Bruxelles, 1885, in-8.°
54. *Mittheilungen der K. K. Geographiscen Gesellschaft in Wien*, 1884. — Wien, 1884, in-8.°
55. NARDUCCI (E.) — *Documenti riguardanti Federico Cesi.* — Roma, 1885, in-4°
56. *Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis.* — Ser. III, — Vol. XII, fasc. II, 1885. — Upsaliae, 1885, in-4.°
57. *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar.* — Stockholm, 1881—82, 1882—83, 1884.
58. *Osservazioni meteorologiche fatte al R. Osservatorio del Campidoglio dal Luglio al Dicembre* 1884. — Roma, 1885, in-4.°
59. PERRY (S. J.) — *Results of meteorological and magnetical observations*, 1884. — Manresa, 1885, in 8° piccolo.
60. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.* — Juin—Novembre, 1885. — Paris, 1885. In-8.°
61. —— *Parte littéraire.* — Juin—Novembre 1885. — Paris, 1885, in-8.°
62. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* — Vol. XI — Part. I, n° 78. — London, 1885, in-8.°
63. RAGONA (D.) — *Il santuario della B. V. in Fiorano.* — Modena, 1885, in-8.°
64. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — 1885 — Boll. n. 5—8. — Roma, 1885, in-8.°
65. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXIV, 4—10. — Napoli, 1885, in-4.°
66. *Revista trimensal do Instituto Historico geographico e ethnographico do Brazil.* — T. XLVII. — Part I e II. — Rio de Janeiro, 1884, in-8°.
67. *Rivista di artiglieria e genio.* — Maggio-Novembre 1885. — Roma, 1885, in-8.°
68. *Rivista italiana di scienze naturali e loro applicazioni.* — A. I. — fasc. II. — Napoli, 1885, in-8.°
69. *Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — I—XXXIX, 1885. — Berlin, 1885, in-4.°
70. *Società entomologica italiana.* Statuto. — Firenze, 1885, in-8.°
71. TERRIGI (G.) — *Ricerche microscopiche fatte sopra frammenti di marna inclusa nei peperini laziali.* — Roma, 1885, in-8.°
72. TOPLEY (W.) — *The national Geological surveys of Europe.* — London, 1885, in-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIª DEL 17 GENNAIO 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE
DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ESERCIZIO GEOMETRICO

NOTA

DEL PROF. MATTIA AZZARELLI

1. Prob: Nell'area di un triangolo assegnare quel punto che congiunto coi vertici, la somma delle tre congiungenti è minima.

È questo il problema che il Fermat proponeva al Torricelli sotto la seguente forma:

« Dati tre punti, che non sieno in diritto, ritrovare un'altro punto, dal quale, tirando ai predetti tre punti, tre linee rette, la loro somma sia minima ».

Secondo quanto riferisce Tommaso Bonaventura nella vita del Torricelli premessa alle Lezioni Accademiche, pag. 54 e seguente – per Silvestri – Milano – 1823; il Torricelli ne dimostrò la soluzione in tre differenti maniere.

Dipoi il medesimo Torricelli propose al Viviani il problema sotto questa forma:

« Dato un triangolo del quale ciascun angolo sia minore di 120 gradi, trovare un punto dal quale tirandosi tre linee rette, l'aggregato di esse sia minimo ».

Il Viviani lo sciolse ampiamente, e lo inserì nell'appendice ai suoi libri – De maximis et minimis – come si legge alla pag. 132 – Della scienza universale delle proporzioni. – Firenze – Alla Condotta – 1674. –

Il Riccati nelle sue – Istituzioni analitiche – Tomo II, pag. 374 e seguenti – Bologna – Tip.ª S. Tommaso d'Aquino – 1765, qualifica il problema per difficilissimò, e prende a risolverlo col metodo di esclusione.

Il Frisi ne dette anche esso una soluzione dipendente dalla teorica degli infinitamente piccoli. Con questo stesso metodo prese a trattarlo ancora il Conte Carlo di Fagnani nelle Produzioni matematiche – tomo II, IV, pag. 162 e seg: Pesaro – 1750 – Stamperia Garottiana.

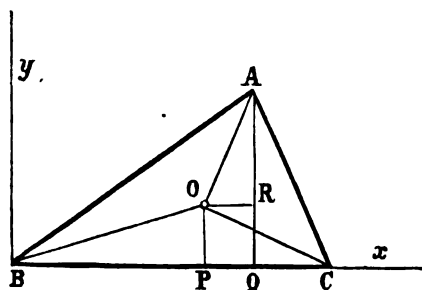
Il Tomassini Andrea nel trattato dei massimi e minimi ne dette una soluzione sintetica, ed il Franchini nel suo – Trattato dei massimi e minimi – Lucca – 1823 – per Bertini, dopo averne data una soluzione sintetica fa notare che il Torricelli ed altri riputavano il problema ritroso all'analisi. Per dimostrare il contrario il Professore Pietro Gallegari nel 1839 in una sua memoria stampata in Bologna coi tipi di Egidio dell'Olmo ne dava una elegante soluzione analitica, dipendente dalla teorica dei massimi e minimi a due variabili, assumendo per variabili indipendenti una delle tre rette, e l'angolo che questa forma con il lato adiacente del triangolo dato.

Anche il Catalan nella sua opera – Teoremi e Problemi di Geometria elementare – Parigi per Dunod, alla pagina 185 sinteticamente risolve il medesimo problema.

Dopo tante soluzioni dell'enunciato problema date da ragguardevoli analisti, è certo una temerità la mia di tentarne un altra.

Ma se in questo problema si fa uso delle coordinate cartesiane del punto cercato per la teoria dei massimi e minimi a più variabili si trovano due equazioni irrazionali e trinomie di assai difficile soluzione algebrica. Però mi è riuscito di superare ogni difficoltà colla introduzione delle funzioni circolari, e dal processo seguito risulta evidente la soluzione sintetica semplicissima, perchè il punto viene geometricamente bene determinato dalla intersecazione di tre segmenti circolari descritti sopra i tre lati del triangolo dato ed ognnno capace di 120 gradi, come ancora emerge la ragione della condizione aggiunta dal Torricelli nel proporre al Viviani il problema, quale si è che, ciascun angolo del triangolo, sia minore di 120 gradi. – Faranno seguito al problema di Fermat ancora degli altri i quali, come il primo, si riferiscono al triangolo. –

2. Si ponga l'origine delle coordinate nel vertice B del triangolo, ed il

Fig. 1.ª

lato BC sia sull'asse delle ascisse, e quello delle ordinate ad esso normale.

Si ritengano le consuete notazioni pei lati ed angoli del triangolo dato.

Le coordinate del vertice B saranno,

$$x = 0, \quad y = 0:$$

quelle del vertice C verranno date da:

$$x = a, \quad y = 0$$

e quelle di A da:

$$BQ = p = c \cos B; \quad QA = q = c \,\text{sen}B.$$

Supponiamo ora che O sia il punto dimandato nell'area del triangolo e le sue coordinate saranno:

$$BP = x; \quad PO = y.$$

Dopo ciò avremo evidentemente

$$OB = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \ OC = \sqrt{(a - x)^2 + y^2}; \ OA = \sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2};$$

la somma di queste tre lunghezze la noteremo con $f(x, y)$ nella quale le due variabili sono indipendenti, e perciò essa funzione dev'essere massima o minima rispetto ciascuna variabile.

Posto dunque:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a - x)^2 + y^2} + \sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}, \qquad (1)$$

per la teorica de massimi e minimi a due variabili abbiamo

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} - \frac{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}}{q - y} = 0 \\ f'_y(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} - \frac{p - x}{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dalle quali dobbiamo ricavare i valori delle due variabili che determineranno al punto richiesto.

A raggiungere questo fine si pongano le (2) sotto la forma seguente:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=\frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=\frac{q-y}{\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2}} \qquad (3)$$

dalle quali, quadrando e sommando, deduciamo

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right)^2=1 \qquad (4)$$

alla quale si soddisfa col porre

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}=\cos\varphi \qquad (5)$$

essendo φ un angolo da determinarsi in funzione delle coordinate e degli elementi del triangolo proposto. Se ora poniamo le (5) sotto le seguenti forme:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{(a-x)^2}}}=\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{y^2}}}=\cos\varphi$$

e facciamo

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tang}\alpha;\quad \frac{y}{a-x}=\operatorname{tang}\beta, \qquad (6)$$

ove α, β sono così gli angoli che le rette OB, OC formano col lato BC del triangolo, otteniamo le due seguenti equazioni trigonometriche di forma razionale e semplicissime:

$$\cos\alpha-\cos\beta=\operatorname{sen}\varphi$$

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=\cos\varphi \qquad (7)$$

nelle quali giova notare che α, β, φ sono funzioni delle coordinate x, y.

Quadrando e sommando le (7) abbiamo:

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 1$$

dalla quale:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$$

onde:

$$\alpha + \beta = 60^0, \qquad (8)$$

Da questo risultato apprendiamo, che, qualunque sia il triangolo dato, la somma dei due angoli che le rette OB, OC formano col lato BC è costantemente di 60^0: dunque l'angolo $BOC = 120^0$.

Dunque il punto che si dimanda si deve trovare sopra un arco circolare capace di 120^0, del quale arco il lato BC è la corda. Dalla (8) abbiamo:

$$\beta = 60^0 - \alpha,$$

che sostituito nella seconda delle (7) si ottiene:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}60^0 \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos 60^0 = \cos\varphi,$$

e perchè:

$$\operatorname{sen}60^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^0 = \operatorname{sen}30^0 = \frac{1}{2}$$

risulta:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha = \cos\varphi$$

ovvero

$$\cos(30^0 - \alpha) = \cos\varphi$$

dalla quale:

$$\alpha = 30^0 - \varphi$$

e quindi

$$\beta = 30^0 + \varphi \qquad (9)$$

Dalle (6) possiamo ora ricavare i valori delle coordinate in funzione di α, β, e quindi dell'arco φ.

Dividendole abbiamo:

$$\frac{a - x}{x} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}$$

e quindi:

$$\frac{a}{x} = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta}$$

ma

$$\tang\alpha + \tang\beta = (1 - \tang\alpha \tang\beta) \tang(\alpha + \beta)$$

e così avremo:

$$x = \frac{a \tang\beta}{\tang 60^0 (1 - \tang\alpha \tang\beta)}$$

che si trasforma in:

$$x = \frac{a}{\sen 60^0} \cos\alpha \sen\beta$$

e per la prima delle (7) risulta:

$$y = \frac{a}{\sen 60^0} \sen\alpha \sen\beta$$

Sostituendo in queste due espressioni i valori di α, β dato per φ troveremo:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos (30^0 + \varphi) \sen (30^0 - \varphi) \\ y &= \frac{2a}{\sqrt{3}} \sen (30^0 - \varphi) \sen (30^0 + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

le quali sviluppate e ridotte danno:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} + 4 \sen \varphi \cos \varphi) \\ y &= \frac{a}{2\sqrt{3}} (4\cos^2\varphi - 3) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ora abbiamo per $\sen\varphi$, $\cos\varphi$ in funzione degli elementi del triangolo e delle coordinate x, y, le due seguenti:

$$\sen\varphi = \frac{p - x}{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{q - y}{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}}$$

che sostituite nelle (11) ne deduciamo:

$$\frac{2x\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} + \frac{4(p-x)(q-y)}{(p-x)^2+(q-y)^2}$$

$$\frac{2y\sqrt{3}}{a} = \frac{4(p-q)^2}{(p-x)^2+(q-y)^2} - 3$$

dalle quali

$$\frac{2x\sqrt{3} - a\sqrt{3}}{a} = \frac{4(p-x)(q-y)}{(p-x)^1+(q-y)^2}$$

$$\frac{2y\sqrt{3} + 3a}{a} = \frac{4(q-x)^2}{(p-x)^1+(q-y)^2}$$

che divise e ridotte danno:

$$\frac{2y + a\sqrt{3}}{2x-a} = \frac{q-y}{p-x} .$$

e quindi

$$(2p-a)\,y - (2q + a\sqrt{3})\,x = aq - ap\sqrt{3}. \qquad (12)$$

Per avere ora un altra equazione di forma razionale fra le medesime variabili si riprenda

$$\alpha + \beta = 60^0$$

dalla quale

$$\frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta} = \sqrt{3}$$

che per la (6) si muta in:

$$\frac{y(a-x) + xy}{x(a-x) - y^2} = \sqrt{3},$$

ovvero

$$y^2 + \frac{a}{\sqrt{3}}y - x(a-x) = 0 \qquad (13)$$

Avvertiremo che le (12) e (13) sono coesistenti colle (3), onde le soluzioni loro sono quelle richieste pel problema.

Dalla (12). abbiamo

$$x = \left(\frac{2p-a}{2q+a\sqrt{3}}\right)y + \frac{aq+ap\sqrt{3}}{2q+a\sqrt{3}} \qquad (14)$$

ed

$$a - x = a - \left(\frac{2p-a}{2q+a\sqrt{3}}\right)y - \frac{aq+ap\sqrt{3}}{2q+a\sqrt{3}}$$

ed anche

$$a - x = \frac{aq + a^2\sqrt{3} - ap\sqrt{3}}{2q + a\sqrt{3}} - \left(\frac{2p - a}{2q + a\sqrt{3}}\right)y.$$

Si ponga per comodo:

$$\frac{2q - a}{2q + a\sqrt{3}} = \text{M}; \quad \frac{ap + ap\sqrt{3}}{2q + a\sqrt{3}} = \text{N}$$

$$\frac{aq + a^2\sqrt{3} - ap\sqrt{3}}{2q + \sqrt{3}} = \text{P}$$

avremo così:

$$x = \text{N} + \text{M}y$$

$$a - x = \text{P} - \text{M}y$$

ed

$$x\,(a-x) = \text{NP} + \text{M}\,(\text{F}-\text{N})\,y - \text{M}^2 y^2.$$

Dopo ciò la (13) si muta in:

$$y^2 + \left\{\frac{\frac{a}{\sqrt{3}} - \text{M}\,(\text{P} - \text{N})}{\text{M}^2 + 1}\right\}y - \frac{\text{NP}}{\text{M}^2 + 1} = o \qquad (15)$$

dalla quale

$$y = -\frac{\frac{a}{\sqrt{3}} - \text{M}(\text{P} - \text{N})}{2\,(\text{M}^2 + 1)} \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{a}{\sqrt{3}} - \text{M}\,(\text{P} - \text{N})\right]^2}{4(\text{M}^2+1)^2} + \frac{\text{NP}}{\text{M}^2 + 1}}$$

E prendendo il solo segno positivo per la parte radicale avremo

$$y = \frac{\text{M}\,(\text{P} - \text{N}) - \frac{a}{\sqrt{3}}}{2(\text{M}^2 + 1)} + \frac{1}{2(\text{M}^2 + 1)}\sqrt{\left[\text{M}\,(\text{P} - \text{N}) - \frac{a}{\sqrt{3}}\right]^2 + 4\text{NP}\,(\text{M}^2 + 1)}$$

$$x = \frac{\text{M}\left[\text{M}(\text{P}-\text{N}) - \frac{a}{\sqrt{3}}\right]}{2(\text{M}^2 + 1)} + \text{N} + \frac{\text{M}}{2(\text{M}+1)^2}\sqrt{\left[\text{M}\,(\text{P} - \text{N}) - \frac{a}{\sqrt{3}}\right]^2 + 4\text{NP}\,(\text{M}^2 + 1)} \qquad (16)$$

le quali determinano nell'area del triangolo il punto dimandato.

Per avere una specie di verifica per queste formole, che si presentano sotto forma complicata, le tradurremo al caso del triangolo equilatero nel

quale sappiamo a priori che, il punto di cui è questione, è dato dalle coordinate

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

perchè esso punto si confonde col centro del triangolo regolare.

3. Per rendere particolari le coordinate date dalle (15) è necessari[o deter]minare le quantità simboliche

$$M, N, P, p, q,$$

Ora pel triangolo equilatero di lato a abbiamo

$$p = \frac{a}{2}; \; q = a \operatorname{sen} 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

ai quali valori corrispondono, come facilmente può verificarsi

$$M = 0, \quad N = \frac{a}{2}, \quad P = \frac{a}{2}.$$

Per questi valori le (15) diventano

$$x = N = \frac{a}{2}$$

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

4. Le due formole che danno la posizione del punto dell'area del triangolo e che fa godere della proprietà del massimo o minimo alla somma delle rette che lo congiungono coi tre vertici, si presentano sotto una forma più semplice quando, per la loro determinazione, si segua il ragionamento seguente.

Assegnato il valore delle coordinate x, y in funzione dell'angolo φ possiamo, con tutta facilità, determinare il valore di questo elemento in funzione di quelli del triangolo dato.

A questo scopo si riprenda

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{p - x}{\sqrt{(p-x)^2 + (p-y)^2}}$$

dalla quale, quadrando e riducendo, deduciamo

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{p - x}{q - y}$$

nella quale sostituendo i valori delle x, y date in funzione di φ (11) abbiamo:

$$\frac{\text{sen }\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2p\sqrt{3} - a\sqrt{3} - 4a \text{ sen }\varphi \cos\varphi}{2q\sqrt{3} - 4a\cos^2\varphi + 3a}$$

che si muta in:

$$(2q\sqrt{3} + 3a) \text{ sen }\varphi = (2p - a)\sqrt{3}\cos\varphi$$

e quindi

$$\text{tang }\varphi = \frac{2p - a}{2q + a\sqrt{3}}$$

ove sostituiti i valori di p, q si ha:

$$\text{tang }\varphi = \frac{2c\cos B - a}{2c \text{ sen B} + a\sqrt{3}}.$$

Conservando per comodo p, q abbiamo

$$\frac{\text{sen}\varphi}{2p - a} = \frac{\cos\varphi}{2q + a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{(2p-a)^2 + (2q + a\sqrt{3})^3}}$$

dalle quali

$$\text{sen}\varphi = \frac{2p - a}{\sqrt{(2p-a)^2 + (2q + a\sqrt{3})^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{2q + a\sqrt{3}}{\sqrt{(2p-a)^2 + (2q + a\sqrt{3})^2}}$$

ed ancora

$$\text{sen}\varphi \cos\varphi = \frac{(2p - a)(2q + a\sqrt{3})}{(2p-a)^2 + (2q + a\sqrt{3})^2}$$

Sostituendo ora questi valori nelle (11), ed eseguendo qualche riduzione risultano

$$x = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left[\sqrt{3} + \frac{(2p - a)(2q + a\sqrt{3})}{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})}\right]$$

$$y = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left[\frac{(2q + a\sqrt{3})^2}{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})} - 3\right]$$

e riducendo, ancora

$$x = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left[\frac{(p^2 + q^2)\sqrt{3} + a(q + p\sqrt{3}) + 4pq}{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})}\right]$$

$$y = \frac{a}{2\sqrt{3}}\left[\frac{(q - p\sqrt{3} + a\sqrt{3})(q + p\sqrt{3})}{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})}\right]$$

Se in queste sostituiamo i valori:

$$p = c\cos B, \quad q = c \operatorname{sen} B$$

otteniamo facilmente

$$x = \frac{ac}{2\sqrt{3}}\left[\frac{c\sqrt{3} + 2a\operatorname{sen}(B + 60^0) + 2c\operatorname{sen}2B}{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}\right]$$

$$y = \frac{ac}{2\sqrt{3}}\left[\frac{(a\sqrt{3} - c\cos(B + 60^0))\cos(B - 60^0)}{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}\right]$$

le quali dipendono direttamente dai soli elementi del triangolo.

5. Determinazione degli angoli α, β.

Abbiamo

$$\alpha = 30^0 - \varphi; \quad \beta = 30^0 + \varphi$$

dalle quali

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)$$

$$\cos\beta = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$$

e sostituiti i valori di senφ, cosφ si ha:

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\left[\frac{a + p + q\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})}}\right]$$

$$\cos\beta = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2a - (p - q\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + p^2 + q^2 - a(p - q\sqrt{3})}}\right]$$

e posti i valori di p, q otteniamo

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{2} \times \frac{a + 2c\cos(B - 60^0)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}}$$

$$\cos\beta = \tfrac{1}{2} \times \frac{2a - 2c\cos(B + 60^0)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}}.$$

Quando il triangolo dato sia equilatero si trova assai facilmente

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

onde

$$\alpha = \beta = 30^0.$$

6. Espressione generale della lunghezza della retta OB.

Questa retta che congiunge il punto (x, y) col vertice B e che è opposta al lato b del triangolo dato la rappresenteremo col simbolo l_b e così per le (10) abbiamo

$$l_b^2 = x^2 + y^2 = \frac{4a^2}{3}\left[\cos^2(30^0 - \varphi)\,\text{sen}^2(30^0 + \varphi) + \text{sen}^2(30^0 - \varphi)\,\text{sen}^2(30^0 + \varphi)\right]$$

dalla quale

$$l_b = \frac{2a}{\sqrt{3}}\,\text{sen}(30^0 + \varphi)$$

che sviluppando il seno si muta in

$$l_b = \frac{a}{\sqrt{3}}(\cos\varphi + \sqrt{3}\,\text{sen}\varphi)$$

e sostituiti i soliti valori di senφ, e cosφ abbiamo

$$l_b = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(\frac{q + p\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + p^2 + q^2 - a\,(p - q\sqrt{3})}}\right).$$

che in funzione degli elementi del triangolo diventa

$$l_b = \frac{ac}{\sqrt{3}} \times \frac{\text{sen}B + \sqrt{3}\cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}},$$

la quale ci dà la legge per avere una qualunque delle tre lunghezze, e così per esse avremo

$$l_a = \frac{bc}{\sqrt{3}} \times \frac{\text{sen}A + \sqrt{3}\cos A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0)}}$$

$$l_b = \frac{ac}{\sqrt{3}} \times \frac{\text{sen}B + \sqrt{3}\cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)}}$$

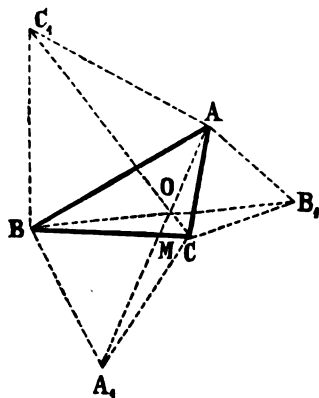
$$l_c = \frac{ab}{\sqrt{3}} \times \frac{\text{sen}C + \sqrt{3}\cos C}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}}$$

Dalle espressioni trovate per le tre rette emerge che desse sono bene determinate nel loro valore numerico quando sia data la specie del triangolo

Così lorquando il triangolo sia equilatero esse sono tutte éguali e ciascuna è rappresentata da

$$l_a = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

che sono precisamente i due terzi della retta che da un vertice và a cadere normalmente sul lato opposto.

FIG. 2.ª

7. Per riconoscere ora il significato geometrico del denominatore delle tre lunghezze, intendiamo che sopra ciascun lato del triangolo qualunque ABC sia costruito il rispettìvo triangolo equilatero, cioè

$$ABC_1, \ ACB_1, \ BCA_1$$

e sieno quindi congiunti i punti

$$A, A_1; \ B, B_1; \ C, C_1$$

per mezzo delle diagonali

$$AA_1, \ BB_1, \ CC_1$$

avremo le seguenti relazioni:

$$\overline{AA}_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0) = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0)$$

$$\overline{BB}_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(C + 60^0)$$

$$\overline{CC}_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^0) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0).$$

Dunque

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

che è, per un triangolo qualunque, il Teorema di Viviani.

Dopo ciò diremo che i denominatori delle tre lunghezze sono eguali, il che risulta ancora analiticamente perchè sviluppando in una qualunque dell'ultime espressioni trovate il coseno, troviamo

$$\overline{AA}_1^2 = a^2 + b^2 - \tfrac{1}{2}.\ 2ab\cos C + 2\sqrt{3}.\frac{ab\ \mathrm{sen}C}{2}$$

dalla quale, per essere

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2, \quad \frac{ab\,\mathrm{sen}C}{2} = s,$$

abbiamo, essendo s la superficie del triangolo,

$$\overline{AA}_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2s\sqrt{3}.$$

la quale è una funzione simmetrica dei tre lati.

8. Determinazione della somma delle tre rette.

Si rappresenti col simbolo $\sum(l)$ la somma, ed avremo:

$$\sum(l) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{bc\,\text{sen}A + ac\,\text{sen}B + ab\,\text{sen}C + \sqrt{3}\,(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^\circ)}}\right]$$

che può mettersi sotto la seguente forma

$$\sum(l) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2\left(\frac{bc\,\text{sen}A}{2} + \frac{ac\,\text{sen}B}{2} + \frac{ab\,\text{sen}C}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^\circ)}}\right]$$

e perchè

$$2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C = a^2 + b^2 + c^2$$

avremo in fine per la somma dimandata

$$\sum(l) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2s\sqrt{3}}.$$

Dunque il valore geometrico di questa è dato da

$$\sum(l) = AA_1$$

la costruzione della quale lunghezza è della massima semplicità.

9. Ora è facile dimostrare che sopra di questa medesima retta si trova il punto dimandato dell'area del triangolo dato.

Di fatti la retta che congiunge il punto O col vertice B forma col lato BC un angolo il cui coseno è dato (§. 5,) da

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{a + 2c\cos(B - 60^\circ)}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(B + 60^\circ)}}$$

Ora posto per comodo angolo $CBB_1 = \alpha_1$ dal triangolo CBB_1 abbiamo

$$\overline{CB}_1^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BB}_1^2 - 2BC \times BB_1 \times \cos\alpha_1,$$

e

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BB}_1^2 - \overline{CB}_1^2}{2BC \times BB_1}$$

e quindi

$$\cos\alpha_1 = \frac{a^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0) - b^2}{2a\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}}$$

che si riduce a

$$\cos\alpha_1 = \frac{2a - 2b\cos(C + 60^0)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}}$$

la quale facilmente si muta nell'altra perchè sviluppando il coseno è

$$\cos\alpha_1 = \frac{2a - b\cos C + b\sqrt{3}\,\mathrm{sen}C}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C+60^0)}},$$

ma si ha

$$a - b\cos C = c\cos B, \quad b\,\mathrm{sen}C = c\,\mathrm{sen}B$$

onde colla sostituzione è

$$\cos\alpha_1 = \frac{a + c\cos B + \sqrt{3}\,c\,\mathrm{sen}B}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}}$$

che equivale a

$$\cos\alpha_1 = \frac{a + 2c\cos(B - 60^0)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}}$$

Dunque

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha \quad \text{ed} \quad \alpha = \alpha_1$$

dunque le due rette BO, BB_1 si confondono, dunque il punto in quistione si trova sulla retta BB_1.

10. Le OA, OB, OC prolungate sono bisettrici degli angoli eguàli che si formano nel punto O, perchè in ciascuno dei tre triangoli esse rette formano coi lati del triangolo dato due angoli di somma eguale a 60^0

Supposto dunque che sia stata prolungata in M la OA avremo

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BO}{CO} = \frac{l_b}{l_c}$$

dalla quale

$$\frac{a}{CM} = \frac{l_b + l_c}{l_c} \quad \text{e} \quad CM = \frac{a l_c}{l_b + l_c}$$

e sostituendo i valori di l_b, l_c avremo

$$CM = \frac{a\,(ab\,\mathrm{sen}C + \sqrt{3}.\,ab\cos C)}{ac\,\mathrm{sen}B + ab\,\mathrm{sen}C + a\sqrt{3}\,(c\cos B + b\cos C)}$$

e quindi

$$CM = \frac{a\left[4s + \sqrt{3}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\right]}{2(4s + a^2\sqrt{3})}.$$

Quando il triangolo dato fosse equilatero si ha immediatamente

$$CM = \frac{a}{2}.$$

Si ponga per comodo

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)}$$

e si prenda la differenza fra due qualunque delle tre rette (§ 6), come

$$l_b - l_c = \frac{1}{d\sqrt{3}}\ (ac\ \mathrm{sen}B + \sqrt{3}.\ ac\cos B - ab\ \mathrm{sen}C - \sqrt{3}.ab\cos C)$$

che si riduce a

$$d\,(l_b - l_c) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\ (ac\cos B - ab\cos C)$$

ed in funzione dei lati

$$d\,(l_b - l_c) = c^2 - b^2$$

e così la differenza

$$l_b - l_c$$

è una quarta proporzionale dopo i tre elementi

$$d,\quad c + b,\quad c - b,$$

11. È degno di nota che veruno degli angoli del triangolo dato può superare 120^0.

Di fatti se riprendiamo qui una qualunque delle espressioni delle tre rette per esempio,

$$l_a = \frac{bc}{\sqrt{3}} \times \frac{\mathrm{sen}A + \sqrt{3}\cos A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^0)}}$$

in essa riconosciamo che il più gran valore che può acquistare l'arco $A + 60^0$ è di 180^0 perchè questo è il limite al quale corrisponde numericamente la la maggior lunghezza del coseno, onde posto

$$A + 60^0 = 180^0$$

risulta

$$A = 120.^0$$

e per questo limite troviamo facilmente essere

$$l_a = 0.$$

Dunque in questo caso limite il punto dimandato si confonde col vertice A del triangolo dato, e la somma delle sue distanze si riduce evidentemente alla somma dei due lati che partono da A.

Tale conseguenza si trae ancora dalla espressione della somma delle tre lunghezze che al (§. 7) vedemmo essere

$$\overline{AA_1}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(B + 60),$$

poichè se qui poniamo $B = 120^\circ$ avremo

$$\overline{AA_1}^2 = a^2 + b^2 - 2ab^2 \cos 180^\circ$$

ovvero

$$\overline{AA_1}^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

dunque

$$AA_1 = a + b.$$

12. Passeremo a riconoscere se le lunghezze trovate sono tali da fornirci una somma massima o minima.

A questo fine si riprendano le derivate prime della loro somma

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} - \frac{p - x}{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} - \frac{q - y}{\sqrt{(p - x)^2 + (q - y)^2}}$$

delle quali prese nuovamente le derivate troviamo

$$f''_x(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{y^2}{\sqrt{[(a - x)^2 + y^2]^3}} - \frac{(q - y)^2}{\sqrt{[(p - x)^2 + (q - y)^2]^3}}$$

$$f''_y(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{(a - x)^2}{\sqrt{[(a - x)^2 + y^2]^3}} + \frac{(p - x)^2}{\sqrt{[(p - x)^2 + (q - r)^2]^3}}$$

$$f''_{x,y}(x,y) = -\left[\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{(a - x)y}{\sqrt{[a - x)^2 + y^2]^3}} + \frac{(p - x)(q - y)}{\sqrt{[(p - x)^2 + (q - y^2]^3}}\right]$$

le quali possono mettersi sotto le seguenti forme impiegando le notazioni fissate al (§ 6)

$$f''_x = \frac{y^2}{l^3_b} + \frac{y^2}{l^3_c} + \frac{(q-y)^2}{l^3_a}$$

$$f''_y = \frac{x^2}{l^3_b} + \frac{(a-x)^2}{l^3_c} + \frac{(p-x)^2}{l^3_a}$$

$$f''_{x,y} = -\left[\frac{xy}{l^3_b} + \frac{(a-x)y}{l^3_c} + \frac{(p-x)(q-y)}{l^3_a}\right.$$

Queste espressioni intuitivamente soddisfano alle condizioni

$$f''(x, y) > 0, \quad f''_y(x, y) > 0$$

$$[f''_{x,y}(x, y)]^2 < f''_x(x, y)\, f''_y(x, y)$$

Dunque la somma

$$l_a + l_b + l_c$$

è un minimo.

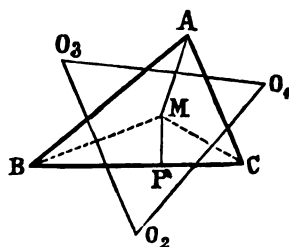
13. Abbiamo già notato che le tre rette le quali nella loro somma godono della proprietà del minimo formano nel punto di loro partenza tre angoli eguali. Qualora si parta da questa condizione è molto semplice provare che la somma è minima, di assegnare la somma di esse rette, ed il va- di ciascuua di esse, e quindi la determinazione del punto. Difatti sia un triangolo qualuque ABC e nel suo piano sia M un punto qualunque il quale congiunto coi tre vertici del triangolo si abbia

$$\text{ang}AMB = \text{ang}BMC = \text{ang}CMA = 120^\circ$$

Avvertiremo fino dal principio che la determinazione grafica del punto M è semplicissima perchè basta costruire sopra ciascuno dei tre lati del triangolo dato un segmento circolare capace dell'angolo 120°, ed il punto di loro incontro è il richiesto.

14. Ciò posto, dimostreremo primieramente che la somma delle tre rette è minima. per questo fine si consideri la figura prima e la formola del (§ 2) e precisamente le due derivate prime.

Quando ha luogo la condizione

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

dico che le due derivate sono nulle. Di fatti riprese le loro espressioni, avremo

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} - \frac{p-x}{\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} - \frac{q-y}{\sqrt{(p-x)^2+(q-y)^2}}$$

Essendo (§. 2)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \frac{y}{a-x} = \operatorname{tang}\beta$$

avremo

$$y = x \cdot \operatorname{tang}\alpha, \quad y = (a-x)\operatorname{tang}\beta$$

Ora pel punto O guidata la OR parallela alla BC avremo

$$\text{ang}ROC = \beta, \quad \text{ang}AOR = 120^\circ - \beta$$

onde

$$\frac{AR}{RO} = \frac{q-y}{p-x} = \operatorname{tang}(120^\circ - \beta)$$

e

$$q - y = (p-x)\operatorname{tang}(120^\circ - \beta)$$

Sostituendo nella derivata rispetto x otterremo

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2(120^\circ-\beta)}}$$

ovvero

$$f'_x(x,y) = \cos\alpha - \cos\beta - \cos(120^\circ - \beta)$$

e perchè

$$\beta = 60^\circ - \alpha$$

sarà pure

$$f'_x(x,y) = \cos\alpha - \cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)$$

sviluppando i coseni e riducendo si ha

$$f'_y(x,y) = \cos\alpha - \tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\cos\alpha = 0$$

Per l'altra derivata avvertiremo essere per le superiori relazioni

$$x = y\cot\alpha, \quad a - x = y\cot\beta, \quad p - x = (q-y)\cot(120^\circ - \beta),$$

e fatte le sostituzioni e riduzioni si trova

$$f'_y(x, y) = \text{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\alpha = 0$$

Colla medesima facilità si dimostrerebbe essere soddisfatte le condizioni pel minimo.

15. Ora passeremo a determinare analiticamente la somma delle tre rette convenendo di rappresentarle coi simboli $x, y. z$, onde avremo

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^0$$

ma

$$\cos 120^0 = -\tfrac{1}{2}$$

e così coesisteranno le tre seguenti

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= a^2 \\ y^2 + z^2 + zy &= b^2 \qquad (1) \\ x^2 + z^2 + xz &= c^2 \end{aligned}$$

dalle quali sommando abbiamo

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = a^2 + b^2 + c^2 \qquad (2)$$

Ricorrendo ora alla fig. 3ª si ha

$$\text{BMC} + \text{CMA} + \text{AMB} = \text{BCA} = s$$

ma

$$\text{BMC} = \frac{xy}{2}\,\text{sen}120^0 = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{CMA} = \frac{yz}{2}\,\text{sen}120^0 = \frac{yz\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{AMB} = \frac{xz}{2}\,\text{sen}120^0 = \frac{xz\sqrt{3}}{4}$$

dalle quali

$$s = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz)$$

e di qui

$$xy + yz + xz = \frac{4s}{\sqrt{3}}$$

che moltiplicando per 3 e addizionando con la (2) e dividendo per 2 otteniamo

$$(x + y + z)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{6s}{\sqrt{3}}$$

e quindi

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2s\sqrt{3}} = p \qquad (3)$$

Dalle (1) deduciamo ancora

$$x - z = \frac{a^2 - b^2}{p}$$

$$y - z = \frac{a^2 - c^2}{p}.$$

Essendo ora

$$x = z + \frac{a^2 - b^2}{p}, \quad y = z + \frac{a^2 - c^2}{p}$$

per la (3) otteniamo

$$z = \frac{1}{3}\left(\frac{p^2 - 2a^2 + b^2 + c^2}{p}\right)$$

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{p^2 - 2c^2 + a^2 + b^2}{p}\right)$$

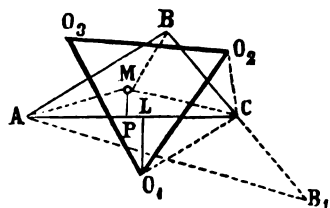
$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{p^2 - 2b^2 + a^2 + c^2}{p}\right)$$

le quali si riducono facilmente alla stessa forma di quelle ottenute al (§ 6).

16. Cor. Se da qualunque punto delle rette MA, MB, MC si conducono ad esse le perpendicolari, si ottengono tutti triangoli equilateri.

Di fatti, posto che sieno O_1, O_2, O_3 i punti di incontro delle successive perpendicolari, considerando il quadrilatero O_1 PMR in esso si hanno sempre due angoli retti in P, R e nel punto M un angolo di 120°: dunque l'angolo opposto a questo, quale è O_1, risulta di 60°. Questo medesimo

ragionamento avendo luogo egualmente per gli altri due vertici O_2, O_3 ne segue che tutti gli angoli del triangolo $O_1O_2O_3$ sono di 60°: dunque esso triangolo è equiangolo, e quindi equilatero.

FIG. 4.ª

17. La determinazione del sito che nell'area del triangolo deve occupare il punto può aver luogo anche come segue.

Sia M il punto dal quale, come sopra, debbano partire le rette dirette ai vertici e che facciano tra loro anguali eguali. Si dicano

$$AP = x, \quad PM = y$$

le sue coordinate cartesiane.

Perchè l'angolo $AMC = 120^\circ$, deve essere

$$\alpha + \beta = 60^\circ,$$

e quindi

$$y = x \operatorname{tang}\alpha, \quad y = (b - x) \operatorname{tang}\beta$$

dalle quali

$$x = \frac{b \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}:$$

ed ancora

$$x = \frac{b \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

ovvero

$$x = \frac{b \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}60^\circ} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

e perchè

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\alpha$$

sarà

$$x = \frac{b}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)$$

e quindi

$$y = \frac{b}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

Il punto M dimandato sarebbe noto di sito quando fosse dato l'angolo α,

se questo rimane indeterminato le due coordinate ci rappresentano un luogo geometrico del quale fa parte il punto M. Per riconoscere più facilmente questo luogo geometrico elimineremo α dandolo in funzione delle coordinate. A questo fine abbiamo

$$\frac{y}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1}$$

dalle quali

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

che sostituiti danno

$$x = \frac{b}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

che si decompone nelle due

$$x = 0; \quad \text{ed} \quad x^2+y^2-bx+\frac{b}{\sqrt{3}}y = 0$$

La prima ci dà il punto origine delle coordinate, e l'altra il luogo geometrico richiesto, che è una circonferenza riferita ad una sua corda, quale, nel caso nostro, è il lato $AC = b$ del triangolo dato.

Le coordinate del centro di questa circonferenza sono

$$+\frac{b}{2}; \quad -\frac{b}{2\sqrt{3}}$$

ed il suo raggio

$$R = \frac{b}{\sqrt{3}} = b \cot 60^\circ.$$

Il valore di quesro raggio poteva aversi immediatamente col notare che il lato b è corda di una circonferenza di raggio R che deve sottendere un arco di 120°; onde essa corda e il lato di un triangolo equilatero iscritto nella circonferenza che passa pei punti A, M, C: dunque deve essere

$$b = R\sqrt{3} \quad \text{ed} \quad R = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Dopo quanto abbiamo esposto è chiaro che, il segmento circolare che passa pei punti A,M,C è capace dell'angolo di 120°, e che la posizione del suo centro, e la lunghezza del suo raggio dipendono con legge determinata dal solo lato del dato triangolo, il quale lato è corda del segmento. La posi-

zione del centro, e la lunghezza del raggio possono determinarsi geometricamente, perchè se pel punto C si conduce una retta al disotto di AC in guisa che formi con essa un angolo di 30°, e quindi pel punto medio L del lato b una perpendicolare a questo, il punto d'incontro di esse due rette dà il centro O_1, ed il segmento CO_1, è il raggio.

Difatti

$$O_1L = CL\,\text{tang}30^0 = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

che, come vedemmo è l'ordinata del centro, ed

$$CO_1 = \frac{AL}{\cos30^0} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

che è il raggio.

Quanto abbiamo operato rispetto il lato b può ripetersi rispetto gli altri due lati, e vengono bene determinati i centri ed i raggi delle tre circonferenze.

15. Merita essere notata la semplicità colla quale si ricava la lunghezza delle rette che dal punto M sono dirette ai tre vertici. Essendo fig. 4.ª

$$PM = \frac{b}{\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha - \text{sen}^2\alpha)$$

dal triangolo APM abbiamo

$$AM = \frac{PM}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}\,\cos\alpha - \text{sen}\alpha)$$

che posta sotto la seguente forma

$$AM = \frac{2b}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\,\text{sen}\alpha\right)$$

diventa

$$AM = \frac{2b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha + 30^0).$$

Dunque ritenute le notazioni già adottate sarà

$$l_a = \frac{2b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha + 30^0) \quad l_c = \frac{2a}{\sqrt{3}}\cos(\alpha_1 + 30)$$

$$l_b = \frac{2c}{\sqrt{3}}\cos(\alpha_2 + 30)$$

le quali possono ridursi a dipendere tutte dalla variabile α, perchè è facile riconoscere che

$$\alpha_1 = C + \alpha - 60^0; \quad \alpha_2 = 60^0 - (A - \alpha)$$

onde

$$\alpha_1 + 30^0 = C + \alpha - 30^0, \quad \alpha_2 + 30^0 = 90^0 - (A - \alpha).$$

Sarà dunque

$$l_a = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + 30^0), \quad l_c = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + C - 30^0)$$

$$l_b = \frac{2c}{\sqrt{3}} \cos(90^0 - (A - \alpha) = \frac{2c}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(A - \alpha)$$

È facile ora riconoscere nuovamente che, nell'attuale condizione, la somma delle tre rette è minima.

Ponendo per comodo

$$l_a + l_b + l_c = L$$

avremo

$$L = \frac{2b}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + 30^0) + \frac{2c}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(A - \alpha) + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos(\alpha + C - 30^0)$$

della quale prendendo la derivata avremo

$$D_\alpha L = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[- b\operatorname{sen} (\alpha + 30^0) - c\cos(A - \alpha) - a\operatorname{sen} (\alpha + C - 30^0)\right] = 0$$

Da questa equazione dobbiamo ricavare il valore di α. A questo fine sviluppando, e riunendo i termini moltiplicati per $sen\alpha$, $cos\ \alpha$. si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{b\sqrt{3}}{3} + c\operatorname{sen}A + a\cos(C - 30^0)\right] \operatorname{sen}\alpha \\ + \left[\frac{b}{2} + c\cos A + a\operatorname{sen}(C - 30^0)\right] \cos\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

Fatto per comodo

$$\frac{b\sqrt{3}}{2} + c\operatorname{sen}A + a\cos(C - 30^0) = M$$

$$\frac{b}{2} + c\cos A + a\operatorname{sen}(C - 30^0) = N$$

sarà

$$\tang\alpha = -\frac{N}{M}$$

da cui trarremo, supposto $M > N$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \quad \cos\alpha = -\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

e se $N > M$ prenderemo

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \quad \cos\alpha = -\frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

onde avremo per la derivata seconda

$$D^2_\alpha L = -M\cos\alpha - N\operatorname{sen}\alpha = \frac{M^2 - N^2}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

nel primo caso, e nel secondo

$$D^2_\alpha L = \frac{N^2 - M^2}{\sqrt{M^2 + N^2}}$$

cioè una quantità sempre positiva, onde la somma delle tre rette è minima.

La somma ci viene data, a motivo del doppio segno del radicale di second'ordine, da

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{M^2 + N^2}$$

17. Se vengono congiunti i tre centri ne risulta un triangolo equilatero.

Difatti si conducano i raggi O_1C, O_2C, pei quali abbiamo fig. 4.

$$O_1C = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad O_2C = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

dal triangolo O_1CO_2 abbiamo

$$\overline{O_1O_2}^2 = \tfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)\right)$$

e per lo sviluppo del coseno

$$\overline{O_1O_2}^2 = \tfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^0\cos C + 2ab\operatorname{sen}60^0\operatorname{sen}C\right)$$

ovvero

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\, 2ab \cos C + 2\sqrt{3}\, \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$$

e per le note proprietà del triangolo dato avremo

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + 2s\sqrt{3})$$

ed in fine

$$\overline{O_1O_2}^2 - \frac{1}{3}(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2s\sqrt{3}),$$

che è una funzione simmetrica rispetto i tre lati del triangolo proposto: dunque tutti i lati del triangolo $O_1O_2O_3$ sono eguali.

18. Si voglia ora la posizione di quel punto dell'area del triangolo pel quale la somma dei quadrati delle distanze dai tre vertici è minima.

Conservate le stesse denominazioni, e coordinate cartesiane abbiamo

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) + (a - x)^2 + y^2 + (p - x)^2 + (q - y)^2$$

che si muta in

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2(a - p)\, x - 2qy + a^2 + p^2 + q^2$$

Derivando ed eguagliando a zero, abbiamo

$$f'_x(x, y) = 6x - 2(a + p) = 0$$

$$f'_y(x, y) = 6y - 2q = 0$$

dalle quali

$$x = \frac{1}{3}(a + p) = \frac{1}{3}(a + c\cos B)$$

$$y = \frac{1}{3}q = \frac{1}{3}c \operatorname{sen} B.$$

Derivando una seconda volta troviamo

$$f''_x(x, y) = 6,\ f''_y(x, y) = 6),\ f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y) = 0$$

onde sono verificate le condizioni del minimo: dunque la somma dei quadrati è minima.

Ora pei determinati valori delle coordinate è facile trovare le espressioni dei quadrati delle tre lunghezze, esse sono

$$l_a^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad l_b^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$l_c^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

e la loro somma risulta essere

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

19. Determinazione degli angoli che le due rette l_b, l_c formano col lato a del triangolo e dell'angolo φ_a che formano tra loro.

Designando con α, β i due primi angoli,

$$(l_b, a) = \alpha, \quad (l_c, a) = \beta$$

avremo

$$\text{tang}\alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{tang}\beta = \frac{y}{a-x}$$

ove sostituiti i valori delle coordinate si ha

$$\text{tang}\alpha = \frac{c\,\text{sen}B}{a + c\cos B}, \quad \text{tang}\beta = \frac{c\,\text{sen}B}{2a - c\cos B}$$

Volendo ora esprimere queste tangenti in funzione dei soli lati e dell'area del triangolo dato porremo

$$\text{tang}\alpha = \frac{ac\,\text{sen}B}{a^2 + ac\cos B}$$

e troveremo

$$\text{tang}\alpha - \frac{4s}{3a^2 + c^2 - b^2},$$

e con eguale ragionamento

$$\text{tang}\beta = \frac{4s}{3a^2 + b^2 - c^2}$$

Le quali ci danno la legge pel calcolo di tutti gli altri angoli che le altre rette formano cogli altri del triangolo.

20. Pel calcolo dell'angolo che le due rette l_b, l_c formano tra loro diremo m, n gli angoli che esse rette formano coll'ordinata y del punto che hanno comune, e sarà

$$\text{tang}\varphi_a = \frac{\text{tang}m + \text{tang}n}{1 - \text{tang}m\ \text{tang}n}$$

ma

$$\text{tang}\, m = \frac{x}{y}, \quad \text{tang}n = \frac{a - x}{y}$$

dunque

$$\text{tang}\varphi_a = \frac{ay}{y^2 + x^2 - ax}$$

e sostituiti i valori delle coordinate, dopo qualche riduzione si ha

$$\text{tang}\varphi_a = \frac{3ac\text{sen}B}{c^2 - 2a^2 - ac\cos B}$$

ed in funzione dei lati e dell'area del triangolo dato avremo

$$\text{tang}\varphi_a = \frac{12s}{b^2 + c^2 - 5a^2}$$

e quindi

$$\text{tang}\varphi_b = \frac{12s}{a^2 + c^2 - 5b^2}$$

$$\text{tang}\varphi_c = \frac{12s}{a^2 + b^2 - 5c^2}$$

Questi angoli saranno acuti od ottusi secondo che risulteranno positivi o negativi i secondi membri.

21. Dobbiamo qui notare che le coordinate le quali fissano la posizione del punto richiesto.

$$x = \tfrac{1}{3}\,(a + c\cos B), \quad y = \tfrac{1}{3}\, c\,\text{sen}B,$$

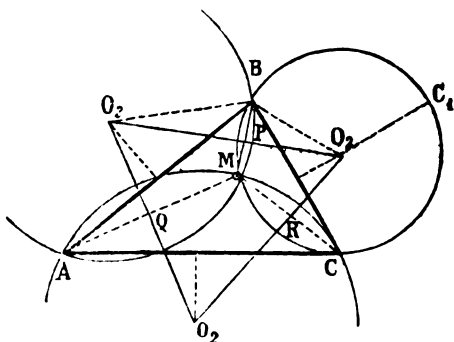
sono quelle che appartengono al centro di gravità del triangolo dato. Dunque il centro di gravità del triangolo è quel punto che gode della proprietà voluta dal problema.

22. La determinazione grafica dunque del punto si ottiene immediatamente perchè trovasi la dove si tagliano le madiane del triangolo.

23. Col principale problema che abbiamo risoluto ha una qualche relazione il seguente, del quale mi veniva dimandata da un amico la soluzione, e che mi si diceva essere stato proposto da Napoleone 1.°

Sopra i tre lati di un triangolo ABC fig. 5 sono stati costruiti tre triangoli equilateri, dei quali O_1, O_2, O_3 sono i centri di gravità. Congiunti questi punti si domanda la natura del triangolo.

Daremo prima la soluzione grafica, e quindi l'analitica.

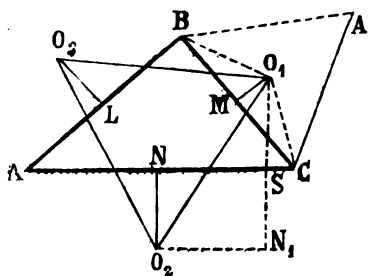
Fig. 5ª

24. È noto che il centro di gravità del triangolo si trova nel punto d'intersecazione delle sue mediane. Siano pertanto O_1, O_2, O_3 essi centri, e s'intendano coi raggi O_1B, O_2C, O_3A descritte le rispettive circonferenze: esse si taglieranno in un punto comune M, che congiungeremo coi tre vertici del triangolo dato.

Si uniscano per mezzo di rette i tre punti O_1, O_2, O_3 ed otterremo un triangolo che diciamo essere equilatero.

Di fatti la circonferenza di centro O_1, passa pei punti B, M, dunque O_1, dista egualmente da essi, così egualmente la circonferenza di centro O_3 passa pei medesimi punti B, M; dunque anche O_3 dista egualmente da medesimi punti: da ciò ne segue che qualunque punto della retta $O_1 O_3$ dista egualmente da B, M, e così essa è il luogo geometrico di tutti i punti della retta perpendicolare nel punto medio di BM.

Col medesimo ragionamento si dimostra essere $O_1 O_2$ perpendicolare nel punto medio di CM.

Ciò premesso si consideri il quadrilatero P M R O_1, nel quale due angoli opposti in P, R sono retti, onde gli altri due sono supplementari. Ora l'angolo C_1, per costruzione, essendo di 60°, l'arco sul quale insiste è di 120°; dunque sul lato BC del triangolo dato abbiamo un segmento circolare capace di 120°; dunque l'angolo $O_2O_1O_3$ è di 60°.

Fig. 6.ª

Ripetendo questo ragionamento per gli altri due angoli, resterà provato che il triangolo $O_1O_2O_3$ è equiangolo, e quindi equilatero.

Cor. Ogni lato del triangolo equilatero $O_1O_2O_3$ divide per metà la retta omologa che unisce il punto M col vertice del triangolo dato.

25. Soluzione analitica.

Intendendo costruita la figura 6ª abbiamo

$$MC = \frac{a}{2}, \quad NC = \frac{b}{2}, \quad AL = \frac{c}{2};$$

e guidate le rette O_1C, O_2C queste risultano bisettrici degli angoli dei triangoli equilateri rispettivi costruiti sopra i lati del triangolo dato, onde avremo

$$O_1C = \frac{a}{2\cos 30^0} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad O_2C = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Il triangolo O_1CO_2 ci dà

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + 60^0)\right)$$

ovvero

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - ab\cos C + \sqrt{3}.ab\,\mathrm{sen}C\right).$$

Ora dal triangolo dato si ha

$$ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad ab\ \mathrm{sen}C = 2s$$

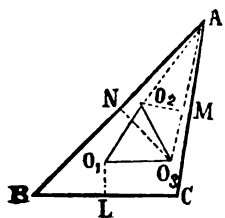
dunque sostituendo e riducendo

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2s\sqrt{3}\right).$$

Di qui risulta che la lunghezza del lato del nuovo triangolo non muta nè valore nè segno quando si permutino tra loro i lati a, b, c: dunque il triangolo risultante è equilatero.

26. Lorquando in un triangolo consideriamo i suoi lati in ognuno di questi possiamo ammettere due bande, l'una interna e l'altra esterna.

Nel caso contemplato nella presente soluzione i triangoli equilateri sono stati costruiti così da trovarsi dalla banda esterna dei lati del triangolo: se però essi venissero costruiti sulla banda interna si otterrebbe egualmente un triangolo equilatero.

Fig. 7.ª

Di fatti eseguita la costruzione della figura 7ª il triangolo che avrà i suoi vertici nei centri dei tre triangoli equilateri sarà $O_1O_2O_3$ che dico essere equilatero.

Prenderemo a considerare il lato O_2O_3 ed il triangolo O_2AO_3 ci dà:

$$\overline{O_2O_3}^2 = \overline{AO_2}^2 + \overline{AO_3}^2 - 2.AO_2 \times AO_3 \cos O_2AO_3;$$

ma

$$AO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \; AO_3 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$O_2AO_3 = BAC - (BAO_2 + CAO_3), \; BAC = A$$

$$BAO_3 = A - 30^\circ, \quad CAO_2 = A - 30^\circ;$$

dunque

$$O_2AO_3 = 60^\circ - A$$

e sostituendo avremo

$$\overline{O_2O_3}^2 = \frac{1}{3}\left[b^2 + c^2 - 2bc\cos(60^\circ - A)\right]$$

che, sviluppato il coseno, e fatte le solite sostituzioni, ci dà

$$\overline{O_2O_3}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2s\sqrt{3}\right).$$

Essendo pertanto una funzione simmetrica dei tre lati il valore del lato del triangolo, esso è equilatero.

27. Il medesimo problema può essere risoluto ancora come segue.

Dal centro O_1 si conduca la O_1N_1 perpendicolare alla AC, e si prolunghi fino al suo incontro in N_1 colla O_2N_1 condotta pel centro O_2 parallelamente ad AC, fig. 6ª.

Il triangolo rettangolo che ne risulta ci dà

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1N_1}^2 + \overline{N_1O_2}^2.$$

Ora il triangolo CSO_1 fornisce

$$SO_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(C + 30^\circ), \; SC = \frac{b}{\sqrt{3}}\cos(C + 30^\circ)$$

$$SN_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

e quindi

$$N_1O_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a + 2b\operatorname{sen}(c + 30^\circ)\right), \; N_1O_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a\sqrt{3} - 2b\cos(C + 30^\circ)\right).$$

Eseguite le sostituzioni e dato luogo alle riduzioni comuni risulta

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - ab\cos C + ab\sqrt{3}\operatorname{sen} C\right)$$

ed in fine

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 2s\sqrt{3}\right)$$

come altrove.

28. La costruzione grafica del problema ci ha dato nell' area del triangolo un punto M il quale è quello dimandato dal problema di Fermat.

Se ora troveremo le lunghezze delle tre rette che dal punto M vanno ai vertici del triangolo vedremo che la loro somma è uguale a quella del (§. 8).

Di fatti considerando fig. 5 il triangolo O_1BO_3 per l'area sua

$$\frac{BO_1 \times BO_3 \operatorname{sen}(B+60^\circ)}{2}$$

per la medesima area abbiamo ancora

$$\frac{O_1O_3 \times BM}{4}$$

Ora essendo

$$BO_3 = \frac{c}{\sqrt{3}},\ BO_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

e posto

$$O_1O_3 = b_1$$

troveremo

$$BM = \frac{2ac}{3b_1}\operatorname{sen}(B+60^\circ)$$

e sviluppando il seno sarà ancora

$$AM = \frac{2bc}{3b_1}\cos(A-30^\circ)$$

e quindi

$$BM = \frac{2ac}{3b_1}\cos(B-30^\circ)$$

$$CM = \frac{2ab}{3b_1}\cos(C-30^\circ).$$

Ora sommando avremo

$$AM + BM + CM$$

$$= \frac{2}{3b_1}\left[bc\cos(A-30^\circ) + ac\cos(B-30^\circ) + ab\cos(c-30^\circ)\right]$$

sviluppando i coseni si ha:

$$AM + BM + CM$$

$$= \frac{2}{3b_1}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C) + \frac{1}{2}(bc \operatorname{sen} A + ac \operatorname{sen} B + ab \operatorname{sen} C)\right]$$

ma

$$bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$bc \operatorname{sen} A + ac \operatorname{sen} B + ab \operatorname{sen} C = 3.2s$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2s\sqrt{3}}{2}}$$

sostituendo risulta

$$AM + BM + CM = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2s\sqrt{3}}{2}}$$

29. Avendo assegnata la lunghezza delle tre rette che dal punto M vanno ai tre vertici è facile il determinare la loro inclinazione ai tre lati del triangolo.

Di fatti, considerando il triangolo BMC, abbiamo

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{MC} = \frac{\operatorname{sen}.120^\circ}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2a} \times MC$$

ove sostituito il valore di MC otteniamo

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{a_1} \cos(C - 30^\circ)$$

e così troveremo ancora

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b}{a_1} \cos(B - 30^\circ),$$

le quali nei casi particolari ci danno bene determinati gli angoli α, β perchè essi devono essere acuti, appartenendo ad un triangolo nel quale il terzo angolo è ottuso.

30. Termineremo questo esercizio geometrico con risolvere trigonometricamente quelle equazioni che pel problema di Fermat furono stabilite dal chmo Calligari, e che egli trattò con elegante metodo algebrico.

Sia il triangolo ABC ed O un punto qualunque dell'area sua. Si ponga fig. 1.ª

$$OA = x,\ OC = y,\ OB = z$$

e notando φ l'angolo OAC avremo per la somma delle tre distanze

$$f(x,\varphi) = x + \sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos\varphi} + \sqrt{x^2+c^2-2cx\cos(A-\varphi)}.$$

Affinchè questa somma possa essere minima si devono verificare le due seguenti equazioni

$$f'_x(x,\varphi) = 1 + \frac{x - b\cos\varphi}{\sqrt{x^2+b^2-2bx\cos\varphi}} + \frac{x - c\cos(A-\varphi)}{\sqrt{x^2+c^2-2cx\cos(A-\varphi)}} = 0$$

$$f'_\varphi(x,\varphi) = \frac{x\,.\,b\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{x^2+b^2-2bx\cos\varphi}} - \frac{x\,.\,c\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\sqrt{x^2+c^2-2cx\cos(A-\varphi)}} = 0$$

Si pongano ora sotto la forma

$$1 + \frac{x - b\cos\varphi}{\sqrt{(x-b\cos\varphi)^2 + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \frac{x - c\cos(A-\varphi)}{\sqrt{(x-c\cos(A-\varphi))^2 + c^2\operatorname{sen}^2(A-\varphi)}} = 0$$

$$\frac{x\,.\,b\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{(x-b\operatorname{sen}\varphi)^2 + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}} - \frac{x\,.\,c\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\sqrt{(x-c\cos(A-\varphi))^2 + b^2\operatorname{sen}^2(A-\varphi)}} = 0$$

ed ancora

$$1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\operatorname{sen}^2\varphi}{(x-b\cos\varphi)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2\operatorname{sen}^2(A-\varphi)}{(x-c\cos(A-\varphi))^2}}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 + \frac{(x-b\cos\varphi)^2}{b^2\operatorname{sen}^2\varphi}}} - \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{(x-c\cos(A-\varphi))^2}{c^2\operatorname{sen}^2(A-\varphi)}}} = 0$$

Avvertiremo qui essere

$$x < b\cos\varphi,\ x < c\cos(A-\varphi)$$

perchè il punto O deve essere nell'interno del triangolo. Dopo ciò porremo

$$\frac{b\operatorname{sen}\varphi}{b\cos\varphi - x} = \operatorname{tang}\alpha;\ \frac{c\operatorname{sen}(A-\varphi)}{c\cos(A-\varphi) - x} = \operatorname{tang}\beta.$$

Fatte queste sostituzioni otteniamo

$$\cos\alpha + \cos\beta + 1 = 0$$

$$x \operatorname{sen}\alpha - x \operatorname{sen}\beta = 0 \qquad (m)$$

ma la x non può essere nulla, dunque dovremo considerare le due

$$\cos\alpha + \cos\beta = -1$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 0 \qquad (n)$$

dalle quali, quadrando e sommando, si ha

$$\cos(\alpha + \beta) = -\tfrac{1}{2}$$

dunque

$$\alpha + \beta = 120^\circ$$

e quindi

$$\beta = 120^\circ - \alpha.$$

Per determinare l'ampiezza α si sostituisca questo valore di β nella seconda equazione delle (m), ed avremo

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(120^\circ - \alpha)$$

ovvero

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

dalla quale

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{3}$$

dunque

$$\alpha = 60^\circ\,;\ \beta = 60^\circ.$$

Per assegnare l'angolo φ le (m) ci forniscono, essendo eguali i loro secondi membri

$$x = \frac{b\sqrt{3}\cos\varphi - b\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3}}, \quad x = \frac{c\sqrt{3}\cos(A-\varphi) - c\operatorname{sen}(A-\varphi)}{\sqrt{3}}$$

ossia

$$b\sqrt{3}\cos\varphi - b\operatorname{sen}\varphi = c\sqrt{3}\cos(A-\varphi) - c\operatorname{sen}(A-\varphi)$$

ove sviluppato il seno e coseno, si ottiene

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b\sqrt{2} - c\sqrt{3}\cos A + c\operatorname{sen}A}{b + c\sqrt{3}\operatorname{sen}A + c\cos A}.$$

Il secondo membro ci fa conoscere facilmente la legge colla quale $\tang\varphi$ dipende dall' angolo A dal quale parte la lunghezza x e dai lati che comprendono quest' angolo.

Da questa formola ricavando le espressioni pel seno e coseno troveremo dopo alcune trasformazioni e riduzioni

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b\sqrt{3} - 2c\cos(A + 30^\circ)}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^\circ)}} \qquad (p)$$

$$\cos\varphi = \frac{b + 2c\operatorname{sen}(A + 30^\circ)}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2c\cos(A + 60^\circ)}}.$$

Per avere ora la lunghezza della x si riprenda

$$\cos = \frac{b}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\right)$$

nella quale sostituiti i valori dati dalle (p) otteniamo

$$x = \frac{2bc}{\sqrt{3}} \times \frac{\operatorname{sen}(A + 60)}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + 60^\circ)}},$$

che rappresenta il medesimo valore della l_a ottenuta al (§. 6).

NOTE MALACOLOGICHE SULLA FAUNA ROMANA

PEL

PROF. AUGUSTO STATUTI

Nel presentare il mio Catalogo sistematico e sinonimico dei molluschi terrestri e fluviatili viventi nella Provincia Romana, non omisi di porre in rilievo che d'appresso un'indagine più estesa e più accurata sopratutto nelle nostre montagne, finora presso che inesplorate, molte altre specie di molluschi, oltre quelle da me classificate nella suenunciata memoria, di leggeri si sarebbero potute riconoscere come realmente incole della nostra regione. A conferma di quel mio prognostico, il quale come che basato sopra una analogia di condizioni geognostiche e climatologiche con altre località, non poteva a mio avviso mancare di realizzarsi, nella sessione del Gennaio 1883 comunicai all'Accademia una prima nota addizionale di parecchie specie non comprese nel suddetto mio primo lavoro, le quali mi venne dato di osservare dopo la pubblicazione del medesimo, ed ora ho l'onore di presentarle una seconda appendice in ulteriore ampliamento della nostra Fauna Malacologica Romana.

N.° 1. *Bulimus obscurus.* MULL.

Questo *Bulimus* mi fu gentilmente favorito in comunicazione dall'esimio nostro collega Sig. Prof. Tuccimei, che lo raccolse sulla vetta liassica del monte Gennaro a metri 1235 sul mare. Questa specie che volgarmente in Francia è nota sotto il nome di grano d'orzo e che in linguaggio scientifico conta una sinonimia di non meno che dieci! differenti denominazioni (1),

(1) *H. obscura* MULL Verm. hist. 1774. II pag. 103.
Turbo rupium DA COSTA. Test. Brit. 1778. pag. 90.
Bulimus hordaceus. BRUG. Encycl: Vers. 1789. I pag. 334.
H. stagnorum PULT. Cat. Dors 1799, pag. 49. Tav. XIX, fig. 27.
Bulimus obscurus DRAP. Tabl. Moll. 1801, pag. 65 non POIR.
Lymnaea obscura FLEM. in Edimb. Encycl. 1814. VII. 1. pag. 78.
Bulimus obscurus STUD. Kurz. Verzeich. 1820. pag. 88.
Ena obscura LEACH. Brit. Moll. pag. 133 ex Turt. 1831.
Buliminus obscurus BECK. Ind. Moll. 1837, pag. 71.
Merdigera obscura HELD in Isis 1837, pag. 917.
Bulimus obscurus. MOQ. TAND. Hist. moll. pag. 291. Tav. XXI, fig. 5—10.

quantunque non comune presso noi, è peraltro notissima, e quindi mi riferisco agli autori che l'hanno determinata per la relativa diagnosi.

N.º 2. *Anodonta Romana*. Drouet.

Allorchè sottoposi al distinto Malacologo Francese Sig. H. Drouet un certo numero di esemplari dell' *Anodonta* nova species da me dragati in quel di Terracina (quale specie presentai già all' Accademia sotto il nome di *Anodonta Anxurensis* nella sessione del Giugno 1882 (1), il prelodato Naturalista ebbe luogo a rimarcare fra quelli parecchi individui che, a suo avviso, presentavano tale una modalità di caratteri fissi, e ben determinati da non lasciar dubbio che potessero essere ragionevolmente considerati come un' altra specie anch' essa nuova, che al medesimo piacque intitolare *Anodonta Romana*.

In dipendenza di questo suo apprezzamento, nel pubblicare indi a poco il suo erudito ed importante lavoro sulle Najadi d'Italia (2), volle comprendervi appunto sotto il suenunciato nome la ridetta specie, colla seguente frase :

« C. oblongo–elongata, convexa, supra arcuata, infra rectiuscula, antice
» brevis rotundata, postice in rostrum elongatum late truncatum producta,
» tenuis, striato–sulcata, nitidula, pallide brunnea, nates tumidulae breviter
» undato-plicatae, plicae interruptae, crista elongata subprominula area
» elongata, ligamentum tenue, laminula linearis, sinus elongatus, impressio-
» nes superficiales, margarita lacteo–caerulescens. »

Lungh : mm. 100
Altez : » 50–55
Diam : » 30.

Trattandosi di una specie nostra designata come nuova, ho voluto richiamare qui questa diagnosi per comodo dei cultori della nostra Fauna Malacologica, affinchè nel caso non siano obbligati ricorrere a pubblicazioni estere per lo studio delle specie che vivono presso noi, non senza peraltro aggiungere che senza il sussidio di una buona figura (la quale non è stata pubblicata neppure dal Drouet) (3), all'appoggio unicamente della suddetta

(1) Fauna Malacologica della Provincia Romana. *Anodonta Anxurensis* Statuti. Roma 1884.

(2) Unionidae de l'Italie par H. Drouet N. 67, pag. 106. – Paris 1883.

(3) Il Sig. Drouet ritiene dubitativamente che la figura 1959. Tav. 194, Tomo VII della Iconografia di M. Kobelt possa rappresentare un individuo non adulto della nostra specie.

descrizione dubito non sia molto facile, in atto pratico, di riconoscere e determinare la suddetta specie; benchè i caratteri più salienti della medesima consistano in sostanza nella sua forma allungata, nella gibbosità obliqua della parte supero centrale delle valve, nella discontinuità delle pieghe degli umboni e nella larga troncatura del rostro.

L' *Anodonta Romana* fu da me pel primo trovata, come ho già detto insieme all' *A. Anxurensis* molti anni indietro nell' estremo tronco del fiume Portatore a Badino presso Terracina, nel Mortola (uno dei canali della Bonificazione Pontina) e recentemente anche nel Lago di Martignano insieme alla specie seguente:

N.° 3. *Anodonta scapulosa.* Drouet.

In una nota pubblicata in calce al resoconto della precitata mia comunicazione del Gennaio 1883 accennai di passaggio a questa specie che fu scoperta a mia cura nel vicino lago di Martignano; e poichè trattasi di una bella ed assai buona specie che fa parte della nostra Fauna Romana, credo prezzo dell' opera di precisarne i caratteri, riferendomi alla diagnosi che ne fu redatta dal menzionato naturalista Sig. Drouet, al quale per debito di amicizia e di stima volli pria che ad ogni altro trasmettere vari esemplari di queste Najadi abitatrici del suddetto lago.

« C. oblonga, ventroso-dorsuosa, supra arcuata, infra rectiuscula, saepe
» medio subretusa, antice semicircularis, postice medio dilatata in rostrum
» obtuse truncatum producta, solidula, translucida, subtiliter striata, ni-
» tidula, brunneo-lutea, nates tumidae vix prominulae undato plicatae
» (saepius late erosae), leves, area vix distincta, crista arcuata, prominula,
» laminula subarcuata, sinus minimus, impressiones superficiales, margarita
» lacteo- coerulescens, nitidula. »

Lunghezza	mm.	85–100
Altezza	»	50–55
Diametro	»	35–40.

Questa *Anodonta* si trova classificata al Num.° 66 nella precitata opera del Drouet sulle Unionidi Italiane. Vive in numerose famiglie nelle acque del suindicato lago ed il suo animale, purchè sia ben condizionato ossia cotto e condito a dovere, non solo è innocuamente comestibile, ma secondo che vennemi riferito, presenta un sapore abbastanza gustoso.

Una circostanza che merita di essere ricordata in ordine a questa specie di *Anodonte* si è che tra gl'individui a mia richiesta pescati, parecchi presentavano delle concrezioni o bernoccoli madreperlacei aderenti alle valve, ed uno si rinvenne fornito di una bella perla, libera, quasi perfettamente sferica della grossezza all'incirca di un pisello.

È cosa notissima che alcune specie particolari di Najadi sono perlifere; ma poichè per quanto io mi sappia tra le Anodonte Italiane capaci di produrre delle vere perle, non si conoscono finora con sicurezza che le *Anodonte* del R. Parco di Raconigi presso Torino (1), e quelle del lago D'Alice parimenti in Piemonte (2), non sarà senza interesse l'aver constatato che anche l'*Anodonta scapulosa* indigena della nostra Provincia possiede questa bella ed importante proprietà. Ho detto con sicurezza, da che quantunque presso che tutti i Naturalisti Italiani che hanno parlato delle nostre Najadi s'accordino in genere nell' asserire che sono perlifere (3), non hanno indicato però in quali specie particolari, all' infuori delle due sunnominate, si trovino o possano trovarsi delle perle, nè tampoco hanno precisato l'*habitat* di questi molluschi privilegiati. Il solo Bonanni fin da un secolo fa (4) ci lasciò scritto d'aver trovato, come esso si esprime, *per favore non so se a dir mi debba o del caso o della verità*, alcune perle in una specie di Unio che racconta di aver pescato nelle acque del nostro Teverone!

Non essendo qui il luogo di entrare in considerazioni speciali in proposito delle perle che possono ottenersi dalle Najadi della nostra Penisola, mi limiterò unicamente ad aggiungere che se una perla fluviatile fu riconosciuta già meritevole di essere posta tra quelle orientali della corona della Regina d'Inghilterra (5), non sarebbe privo d' importanza, per quanto almeno io ne penso, uno studio accurato sul tema delle perle che possono fornire anche i nostri laghi e fiumi d'Italia (tema che io stesso mi son proposto di svi-

---

(1) *De Filippi* — Sull'origine delle perle - Torino 1852.

(2) *Issel* — Sulle Linnee ornate di fascie e sulle Anodonte perlifere trovate nel lago d'Alice in Piemonte. Questo lago secondo il precitato Autore è un piccolo bacino morenico situato nel territorio d'Ivrea non lungi dalla via di Traversella tra i monti che separano la chiusella della Dora.

(3) *Lessona* - I tesori del mare Firenze 1568. Nuova Antologia.

Omboni - Nuovi elementi di Storia Naturale.

Paulucci - Molluschi fluviatili Italiani inviati all'Esposizione internazionale della pesca in Berlino 1880.

Issel sulle perle nella Rivista marittima Anno V. Roma 1872.

(4) BONANNI — Ricreazione dell'occhio e della mente. Roma 1681.

(5) KNIGHT nella sua Natural history - London - ricorda questo fatto asserendo che la perla in parola fu trovata in un *Unio* di un fiume di Scozia.

luppare in apposita memoria); quali perle hanno pure o possono avere un valore commerciale in ispecie ove siano pure, di buona forma, grosse e di un bell'oriente.

Del resto la scoperta di queste due nuove specie di *Anodonte* nelle suindicate differenti località, conferma anco una volta quanto già venne magistralmente dichiarato dall'illustre naturalista Moquin Tandon (1), laddove parlando in proposito di questo gruppo di molluschi si espresse: « On dirait que chaque rivière, chaque mer, chaque fossé nourrit son Anodonta ». Vero è che il prelodato Autore gravandosi, e non a torto, della moltiplicità delle specie create dai moderni Malacologi a spese dei tipi originali, soggiunse altresì: « On a donné trop de valeur à l'influence déterminée par la nature des eaux, par leur degré de pureté, par leur genre de vitesse et par les caractères minéralogiques de leur lit » (2). Faccio peraltro riflettere, per quanto mi riguarda, che nel caso speciale qui non si tratta di due specie che io abbia preteso di spacciare per nuove, ma sibbene di due specie come tali apprezzate, riconosciute, e quel che più monta, secondo che dissi di sopra, già pubblicate da un distintissimo Malacologo, quale è il Sig. Drouet, la cui somma competenza specialmente per la famiglia delle Najadi, niuno io credo potrebbe ormai rivocare in dubbio; e poichè queste specie appartengono appunto ai corpi d'acqua della nostra Provincia, sembrami che sotto ogni riguardo io non avrei potuto ragionevolmente esimermi di darne contezza, per classificarle quindi in addizione di quelle già registrate nel mio Catalogo della Fauna Malacologica Romana.

N° 4: *Pomatias septemspirale*. RAZOUM.
Var. *Praenestina*. STATUTI.

Questa elegante conchiglia fu da me trovata tra i fessi della roccia calcare a rudisti, ove vive ad un'elevazione di circa met. 650 sul mare lungo la strada che da Palestrina (antica *Praenestes*) guida al sovrastante villaggio denominato Castel S. Pietro. Appartiene evidentemente al gruppo del *P. septemspirale* RAZOUM (= *Cyclostoma maculatum* DRAP.) ma presenta una

(1) Moquin Tandon — Histoire naturelle des Mollusques terrestres et fluviatiles de France - Paris 1855.

(2) Questo concetto del Moquin Tandon fu anche esternato dal valente Malacologo Sig. Maggiore Adami nella sua memoria sui molluschi terrestri e fluviali viventi nella valle dell'Oglio, ossia nelle valli Camonica di Scalve e di Borlezza. Padova 1856 e fu altresì recentemente ripetuto e vieppiù sviluppato dal Ch.mo Edmondo De Betta nelle sue note critiche sulle Najadi d'Italia - Venezia 1884.

forma più snella, una spira che cresce più lentamente, un tessuto più esile, un colorito più pallido ed ha le costicine meno pronunciate del tipo, col quale per conseguenza non potrebbe identificarsi. Per altro essendo ormai dimostrato che nei caratteri delle specie del gen. *Pomatias* vi è molta incostanza, di guisa che, secondo saggiamente ne avverte il Ch. Prof. De Stefani « non bisogna propendere a fare delle specie distinte ad ogni variazione » (1) ho creduto limitarmi a ritenere la suindicata forma di *Pomatias* vivente nella nostra Provincia come una semplice varietà locale, enunciandola sotto il nome di *septemspirale Var: Praenestina*.

A maggiore intelligenza delle differenze di forme che caratterizzano questo mollusco devo aggiungere che avendo comunicato al ben noto malacologo Sig. Napoleone Pini Segretario della Società Italiana di scienze naturali in Milano, parecchi esemplari del suddetto *Pomatias*, il medesimo li giudicò assai vicini al *P. turricula* Paulucci (2) (che è una varietà del *Septemspirale*) dal quale tuttavia a suo avviso diversificano assolutamente sia pel modo di distribuzione e colorito delle costicine, sia per lo sviluppo dei giri, non che per il peristoma che è più robusto più espanso e più riflesso.

N.° 5. *Pomatias patulum* Drap
Var: Sublacensis Statuti.

Questo *Pomatias* abita sulle calcari eoceniche che formano le ultime lacinie di monti Sublacensi tra Guercino ed Anticoli ove fu da me raccolto in abbondanza a circa Met: 612 sul mare. Ha una analogia col *P. Patulum* Drap cui tuttavia non si può riunire perchè le costicine sono più elevate, meno dense, e di colore più bianchiccio del tipo. Inoltre il peristoma è assolutamente doppio, come si verifica nella varietà β Labiatum di Moquin Tandon (3).

I Pomatias vivono esclusivamente nei paesi calcarei o per lo meno nelle immediate vicinanze di questi; ed all'appoggio di questo principio, nel por termine a questa comunicazione non voglio omettere di manifestare un mio sentimento e cioè che d'appresso una più diligente esplorazione, da eseguirsi a tempo opportuno sui versanti delle diverse catene di montagne,

(1) Carlo De Stefani. Molluschi viventi nella Valle del Serchio superiore – Pisa 1875.

(2) Paulucci. Materiaux pour servir a l'étude de la Faune Malacologique terrestre et fluviatile de l'Italie et de ses iles – Paris – 1878.

Paulucci. Descrizione di alcune nuove specie del Gen: Pomatias Bull. Soc. Malac. Ital. Vol. V. 1879.

De Stefani. Pomatias viventi sulle Alpi Apuane Bull. Soc. Malac. Vol. V. 1879.

(3) Moquin Tandon: Opera citata.

per la maggior parte appunto calcari, che intersecano e circondano la Provincia Romana, la nostra Fauna Malacologica locale senza meno potrà essere arricchita di molte altre specie appartenenti a questo genere di molluschi (1) dei quali del resto non si ha difetto nelle altre regioni della nostra Italia (2).

---

(1) Il genere *Pomatias* fu istituito originariamente dal conchiliologo Bernese STUDER nel 1789 nella sua Faunula Helvetica senza però assegnargli dei caratteri precisi. In seguito fu adottato e caratterizzato da HARTMAN nel 1821 nel suo Syst. Gast.

(2) A comodo di chi amasse formarsi un concetto approssimativo sull'estensione del genere POMATIAS in Italia aggiungo un cenno bibliografico di alcuni naturalisti, esclusivamente Italiani, che più particolarmente se ne sono occupati o che ne hanno fatto menzione nelle loro opere.

PORRO — Malacologia terrestre e fluviale della Provincia Comasca Milano 1838.

VILLA — Catalogo dei molluschi della Lombardia. Milano 1844.

STROBEL — Notizie Malacostatiche sul Trentino 1851.

SPINELLI — Catalogo dei molluschi terrestri e fluviatili della Provincia Bresciana — Verona 1856.

UZIELLI — Catalogo dei molluschi viventi nei bagni di Lucca 1863.

ISSEL — Molluschi raccolta nella Provincia di Pisa - Milano 1866.

GENTILUOMO — Catalogo dei molluschi terrestri e fluviatili della Toscana. Bull. Malac. Ital. I. 1868.

TAPPARONE CANEFRI. Indice sistematico dei molluschi testacei dei dintorni della Spezia e suo golfo 1870.

DE BETTA — Malacologia Veneta — Venezia 1870.

DE BETTA. Molluschi della Provincia Veronese — Verona 1870.

VILLA — Specie e varietà dei molluschi della Lombardia. Pisa 1871.

ISSEL — Appendice al catalogo dei molluschi della Provincia di Pisa. Milano 1872.

DE STEFANI — Elenco dei molluschi della Versilia in Toscana. Bull. Malac. Ital. Tomo V. 1873.

DE STEFANI — Molluschi viventi ecc. 1875. Op. citata.

ADAMI — Molluschi raccolti in Val di Caffaro. Pisa 1875.

DEL PRETE — Nota di conchiglie raccolte nei Comuni di Viareggio Massarosa e Camajore 1875.

ADAMI — Catalogo dei molluschi viventi nella Valle dell'oglio. Atti della Soc. Scienz. Nat. Veneto-Trentina. 1876.

PINI — Molluschi terrestri e di acqua dolce viventi uel Territorio di Esino. Milano 1876.

PINI — Notizie malacologiche relative alla Fauna Italiana. Atti Soc. Scien. Nat. 1877.

ADAMI — Reclamo di priorità. Bull. Soc. Malac. Ital. Vol. III. Milano 1877.

PAULUCCI — Materiaux, ecc. 1878, Op. citata.

DEL PRETE — Note di conchiologia Apuana. Siena 1879.

DE STEFANI — Pomatias viventi, ecc. 1879. Op. citata.

DE STEFANI — Nuove specie di molluschi viventi nell'Italia centrale. Bull. Soc. Malac. Ital. Vol. V. 1879.

PAULUCCI — Descrizione, ecc. 1879. Op. citata.

LESSONA — Molluschi viventi nel Piemonte. Atti R. Accademia Lincei Vol. VII. 1880.

PAULUCCI — Fauna Malacologica della Calabria. Firenze 1880.

BENOIT — Nuovo catalogo delle conchiglie terrestri e fluviatili della Sicilia. Messina 1882.

DE STEFANI — Molluschi viventi nelle Alpi Apuane e Monte Pisano e nell'Apennino adjacente. Bull. Soc. Malac. Ital. Vol. IX. 1883.

PINI — Novità malacologiche. Milano 1884.

COMUNICAZIONI

Boncompagni, D. B. — *Presentazioni varie*:

D. B. Boncompagni presenta all'accademia, da parte del Sig. Gustavo Eneström, un esemplare da lui indirizzato alla medesima Accademia del volume intitolato: « BIBLIOTHECA MATHEMATICA || HERAUSGEGEBEN || VON || RÉDIGÉE || PAR || GUSTAF ENESTRÖM. || 1885. || STOCKHOLM || F. & G. BEIJER. || 1885. || BERLIN || MAYER & MULLER || 38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE. || PARIS || A. HERMANN || 8 RUE DE LA SORBONNE. || CENTRAL—TRICKERIET, STOCKHOLM. » In 4°, di col. 200.

Questo volume, oltre un elenco di 1428 pubblicazioni, in 13 lingue, contiene anche le seguenti note:

D. B. Boncompagni presenta quindi 1.° Un esemplare d'una tiratura a parte d'una breve nota estratta dal N.° 4 (col. 196) del detto volume intitolato: BIBLIOTHECA MATHEMATICA || HERAUSGEGEBEN || VON || RÉDIGÉE || PAR || GUSTAF ENESTRÖM.||1885, ecc., nella quale egli dà notizie di un manoscritto da lui recentemente acquistato, contenente il *Tractatus geometriae* di « Petrus de Dacia. »

2.° Un esemplare del primo fascicolo (Gennaio—Febbraio 1886) di una raccolta bimestrale intitolata: PERIODICO || DI || MATEMATICA || PER || L' INSEGNAMENTO SECONDARIO || DIRETTO || DA || DAVIDE BESSO || PROF. DI MATEMATICA NEL R. ISTITUTO TECNICO DI ROMA || ROMA || TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || 1886. (In 8° di 32 pagine).

3.° Un esemplare del fascicolo di Marzo 1885 del suo Bullettino delle scienze matematiche e fisiche, contenente le fine dei « DOCUMENTI INEDITI || PER LA STORIA » DEI MANOSCRITTI GALILEIANI || NELLA BIBLIOTECA NAZIONALE DI FIRENZE || PUBBLICATI » ED ILLUSTRATI || DA || ANTONIO FAVARO. »

FERRARI, P. G. S. – *Sulla pioggia straordinaria di stelle cadenti del 27 Novembre* 1885:

Il ch. P. Gaspare Stanislao Ferrari, dopo avere richiamato l'attenzione dei soci intorno al grandioso fenomeno della pioggia straordinaria delle stelle cadenti del 27 novembre 1885, ripetizione più copiosa di quella dello stesso giorno nel 1872, fece osservare come, non ostante il parere contrario di altri scienziati, non ardisce di francamente asserire, come si è fatto, essere tale pioggia non altro che l'avanzo della cometa di Biela, quasi essa si fosse sfasciata ed interamente ridotta in frantumi di polvere cosmica; opinione che fu emessa eziandio nel 1872. Egli si associa ancora per questa apparizione a quanto ne scrisse allora il chiarissimo professore Schiaparelli; il quale, mentre da una parte ammetteva che lo sciame delle meteore dal 27 al 29 novembre avesse un'orbita identica colla cometa di Biela (la quale correlazione era stata già notata dal Weisse per molte meteore di questo periodo anteriormente osservate), pur nondimeno dal calcolo sì della posizione del nucleo della cometa, come del tempo che sarebbe richiesto affinchè la Terra potesse attraversare le meteore da essa formate, appariva manifesto che sarebbero perciò richieste più centinaia di anni: conciossiachè tanto pel 1872, quanto per l'epoca presente, la Terra non attraversava il nucleo della cometa, che ne era distante.

Il fatto poi dell'intima correlazione fra queste meteore e la cometa di Biela, in quanto concerne l'orbita ad esse comune, esso non è nuovo nell'astronomia, accadendo il medesimo per le meteore del 14 novembre (Leonidi), per quelle del 10 Agosto (Perseidi) e quella del 20 aprile, le quali tutte vanno di conserva con tre comete ben conosciute, come trovò lo stesso prof. Schiaparelli. Conchiudeva quindi colle parole del sullodato professore: « che, cioè, la corrente di Biela non è una formazione tanto recente e che » il pronunziare temerariamente su questa e su altre consimili questioni, » non può per ora produrre altro frutto, che una maggior incertezza e » confusione d'idee in un argomento già per sè così difficile e così oscuro. »

FONTI, March. L. – *Presentazione di una sua memoria sulla trasmissione a distanza della energia* (1):

Il socio aggiunto ch. sig. Marchese Luigi Fonti, espose una nuova maniera da lui ideata per risolvere l'importante problema della trasmissione a distanza dell'energia. Il sistema consiste essenzialmente nel decomporre l'acqua con l'energia elettrica delle dinamo, attivate da forze idrauliche alla stazione mittente, e trasmettere poi il gaz, mediante condottura, alla stazione ricevente in appositi gazometri aspiranti. Citò le esperienze del Prof. Clark di Liverpool, pubblicate il Novembre 1885 nel *Philosophical Magazine* di Londra, mercè le quali è oggimai constatato che la decomposizione elettrochimica dell'acqua acidulata, non diminuisce al crescere della sopraincombente pres-

(1) È stata inserita nel vol. II° delle Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

sione, che nelle citate esperienze giunse fino a 200 atmosfere. Sicchè, eseguendo in un voltametro a tenuta di gaz la produzione elettrochimica dell'idrogene, questo giungerebbe per l'annessa condottura alla stazione ricevente in virtù della forza espansiva sviluppata dal gaz al voltametro. Asserì non esservi serie difficoltà teoriche sull'attuazione del sistema, a giudizio degli illustri scienziati sig. Prof. Blaserna e P. Provenzali.

Passando quindi ad esaminare il valore industriale del proposto sistema di trasmissione, analizzò in un caso concreto il costo a metro cubo del gaz idrogeno così trasmesso. In una condottura di 27 chilometri, discendente per un dislivello di metri 150, del diametro di 0,15 centimetri e del costo a metro lineare di lire 10, dimostrò analiticamente potersi ottenere con la pressione al voltametro di cinque atmosfere e mezzo una portata di 1000 metri cubi di gaz all'ora, ammessa anche la perdita per fughe del 38 %. Stabilendo per quota interessi ed ammortizzazione del capitale impiegato nella condottura il 10 %, risultò il costo a metro cubo del *gaz idrogeno puro* di Lire 0.0031; con che si avrebbe un margine ben grande per le altre spese di impianto, quali l'acquisto ed installamento delle turbine, delle dinamo, dei gazometri, dei motori e forni a gaz, non che per l'acquisto della forza idraulica.

I grandi e numerosi vantaggi industriali che offre l'impiego dei motori e dei forni a gaz, sono quindi altrettante ragioni in favore della convenienza pratica di adottare il proposto sistema; oltre la facilità di immagazzinare nei gazometri l'energia, per poi trasformarla in forza motrice, calore o luce, e senza valutare la rilevante quantità di ossigeno puro, che si ottiene in una all'idrogeno. Accennò all'immensa quantità di forza idraulica utilizzabile in Italia e nelle provincie subalpine specialmente, ai potenti mezzi di produrre meccanicamente e modificare l'energia elettrica, ai varii congegni creati dalla moderna industria per applicare il gaz ai diversi suoi usi come calore e come forza motrice; ne dedusse l'importanza che avrebbe il sistema nel campo della pratica industriale; augurandosi che persone competenti vogliano del pari analizzare accuratamente la soluzione da lui proposta dell'importante problema.

CASTRACANE, Conte AB. F. – *Presentazione di opere di soci*:

Il Presidente presentò da parte dell'autore signor G. B. Carnoy, socio corrispondente un volume ricco di 8 tavole, intitolato « *La Cytodiérèse » chez les Arthropodes* »; da parte del socio corrispondente prof. D. Ragona i seguenti opuscoli intitolati « 1. Il freddo di Modena: 2. Andamento » annuale della temperatura minima nello stato superficiale del suolo: 3. An» damento annuale della evaporazione, parte II »: da parte del socio corrispondente D. Roig y Torres una « Memoria acerca de la primera exposi» cion internacional de electricidad celebrada en Europa »: e finalmente da parte del socio corrispondente signor de Jonquières le due seguenti note a stampa: « 1) Modes de solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui

» est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona : 2) sur les » transformations géométriques birationnelles d'ordre *n*. »

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

1. Lettera del Sig. Principe d'Antuni per scusa di non poter intervenire all'adunanza.

2. Lettera del Sig. Bibliotecario della Casanatense, reclamante alcuni fascicoli degli Atti Accademici.

3. Lettera del Sig. Bibliotecario della comunale di Verona per ringraziare dell'invio degli Atti.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI : Conte Ab. F. Castracane, presidente – Comm. C. Descemet – Cav. A. Statuti – Prof. V. De Rossi Re – P. F. S. Provenzali – Prof. M. Azzarelli – P. G. S. Ferrari – Prof. G. Tuccimei – Principe D. B. Boncompagni – P. F. Ciampi – Prof. M. S. de Rossi, segretario.

AGGIUNTI : Marchese L. Fonti.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Almanacco del Coltivatore.* — Strenna agraria per la provincia di Cuneo, 1886. — Cuneo, 1885, in-8.° piccolo.
2. *Annalen der Physik und Chemie.* 1886, n.° 1. Leipzig, 1886, in-8.°
3. *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1884-85. — Serie quarta. — Rendiconti. — Vol. I, fasc. 28.° — A. CCLXXXIII, 1885—86. Serie quarta. Vol. II° fasc. I° Roma, 1885, 1886, in-4.°
4. BESSO D. — Periodo di matematica per l'insegnamento secondario. A. 1, fasc. I° Roma, 1886, in-8.°
5. *Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVIII, marzo 1885. Roma, 1885, in-4.°
6. CARNOY (J. B). — *La cytodiérèse chez les arthropodes.* Louvain, s. a. in-4.°
7. *Crónica cientifica.* — A. VIII. — n. 193. — Barcelona, 1885, in-8.°
8. DE JONQUIÈRES. — *Sur les transformations géométriques birationelles d'ordre* n. Paris, 1885, in-4.°
9. —— *Modes de solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona.* Paris, 1885, in-4.°
10. EGIDI P. G. — *Lettera al P. Stanislao Ferrari.*
11. ENESTRÖM G. — *Bibliotheca mathematica,* 1885, n. 1—4. Stockholm, 1885, in-4.°
12. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVII. — n.° 8, 9. — St. Pétersbourg, 1885, in-8.°
13. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosettimo. — Serie XIII, Vol. I, — quad. 854. — Firenze, 1886, in-8.°
14. *Polybiblion* — *Partie technique* — II° série — T. XI, — Douzième livraison. *Partie littéraire,* t. XXII, sixième livraison. Paris, 1885, in-8.°
15. RAGONA D. — *Il freddo in Modena.* — Modena, 1886, in-8.° piccolo.
16. —— *Andamento annuale della temperatura minima nello strato superficiale del suolo.* — Roma, 1885, in-4.°
17. —— *Andamento annuale della evaporazione.* (Parte II^a). Roma, 1885, in-4.°
18. *R. Comitato Geologico d'Italia.* — 1885 — Boll. n. 9 e 10. — Roma, 1885, in-8.°
19. *Rivista di artiglieria e genio.* — Dicembre 1885. — Roma, 1885, in-8.°
20. ROIG Y TORRES R. — *Memoria acerca de la primera exposición internacional de electricidad celebrada en Europa.* — Barcelona, 1885, in-8°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IIIª DEL 21 FEBBRAIO 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

SULLA TENSIONE SUPERFICIALE DE' LIQUIDI
NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI, D. C. D. G.

Da lungo tempo si sapeva che alla superficie libera dei liquidi si manifestano certe forze, le quali non hanno le loro corrispondenti nell'interno della massa; e queste forze considerate sotto l'una o l'altra forma furono sempre il punto d'onde partirono tutti coloro che trattarono analiticamente la teoria dei fenomeni capillari. La massima parte dei fisici che si occuparono di questa teoria, seguendo l'esempio di Laplace (1), fecero consistere quelle forze in una pressione che indipendentemente dalla gravità si esercita normalmente alle superficie liquide in virtù delle azioni molecolari. Ma oltre che non abbiamo alcuna prova di fatto che ci dimostri l'esistenza di tale pressione, essa solo ci può fare intendere i fenomeni che presentano le superficie curve, non già le piane che pure sappiamo trovarsi in uno stato molto diverso dal resto della massa liquida. Ora poi che i risultati delle numerose sperienze di Duprè (2), Mensbrugghe (3), Plateau (4), e di

(1) V. Supplément au livre X de la mécanique céleste.
(2) V. Duclaux — Théorie élémentaire de la capillarité. Paris 1872.
(3) V. Bulletins de l'Académie de Belgique. 1866.
(4) V. Statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Paris 1873.

molti altri hanno mostrato che alla superficie libera de' liquidi esiste una tensione, la quale si esercita nel piano tangente la superficie stessa in tutte le direzioni colla medesima intensità, non abbiamo bisogno di altro per intendere che quella tensione sia la vera causa dei fenomeni capillari. Ciò che ancora rimane a conoscere è l' origine di siffatta tensione, o in altri termini come avvenga che nonostante i legami che tengono unite assieme le molecole dei liquidi, pure le loro superficie libere si comportino a guisa di membrane perfettamente elastiche ed eminentemente estensive (1). Quelli che ancora considerano le azioni molecolari come gli effetti di forze inerenti alle molecole pesanti, senza occuparsi del mezzo imponderabile in cui sono esse immerse, debbono trovare grande difficoltà nel concepire quella tendenza a diffondersi e stendersi in veli sottilissimi che ci mostrano le superficie dei liquidi quando vengono a contatto fra loro o coi corpi solidi. Non è così per coloro che invece di supporre nelle molecole una virtù di attrarsi mutuamente, fanno dipendere le azioni molecolari dallo squilibrio di pressione prodotto nell' etere dai movimenti che tengono di continuo agitate le particelle dei corpi. Ammesso ciò è manifesto che a partire dalla superficie libera dei corpi la densità dell'etere soprastante andrà progressivamente crescendo, di maniera che la resistenza opposta al moto delle molecole superficiali sarà minima nella direzione tangente la superficie medesima (2). Nei solidi per la grande forza che ne tiene unite le molecole questo eccesso di mobilità non può produrre alcun effetto apprezzabile; ma nei liquidi, le cui molecole cedono ad ogni minimo impulso, quelle che si trovano alla superficie libera saranno incessantemente spinte ad aumentare le loro escursioni dalla parte ove è minore la resistenza, cioè parallelamente alla superficie stessa. Ed ecco come senza bisogno di nuove ipotesi e senza supporre nei corpi altre forze tranne quelle che nascono dai movimenti molecolari, si può intendere come avvenga che la superficie libera dei liquidi sia la sede di una tensione costantemente diretta nel piano tangente quella superficie.

(1) Segner fu il primo che verso la metà del secolo passato paragonò le superficie libere dei liquidi a delle membrane elastiche, paragone ampiamente giustificato dai fatti più tardi scoperti. *V. Commentationes Societatis Scientiarum Göttingensis* 1757.

(2) I due illustri geometri Cauchy e Lamè per mezzo dell' analisi matematica vennero alla conclusione che debba esservi repulsione fra l'etere e la materia pesante, epperò che l' etere sia più rarefatto in vicinanza dei corpi e nel loro interno che nello spazio circostante (*V. Journal de l'école polytechnique Tom. XIV*). Ora vediamo che senza ammettere tale ripulsione come forza inerente alle molecole si giunge alla medesima conclusione considerando le alterazioni di equilibrio che debbono avvenire nel mezzo etereo in conseguenza dei movimenti da cui sono animate le molecole pesanti.

Questo modo di concepire l'origine della tensione superficiale potrà sembrare in contradizione col fatto che crescendo la temperatura le ascensioni capillari e per conseguenza la tensione superficiale dei liquidi diminuiscono, e molto più rapidamente che non diminuisca la densità (1). Ed in vero se ad ogni aumento di moto termico deve corrispondere una maggiore rarefazione nell'etere soprastaute alla superficie dei corpi, parrebbe invece che quanto aumenta l'azione del calorico altrettanto dovesse aumentare la tensione superficiale e l'ascensione capillare dei liquidi. Ma si noti che i fenomeni del calorico ci fanno intendere i movimenti molecolari essere sempre tanto rapidi che lo stratarello immediatamente contiguo alla superficie dei corpi vuole essere considerato come uno spazio quasi assolutamente vuoto. Sicchè l' aumento di rarefazione prodotto nell' etere soprastante da un più energico agitarsi delle molecole superficiali deve di preferenza manifestarsi negli strati alquanto distanti dallá superficie. Si vede quindi che crescendo la temperatura sempre più diminuirà la resistenza che si oppone al moto delle molecole superficiali nella direzione normale ; e dovrà pure arrivare un punto in cui la facilità di muoversi delle molecole superficiali sia la stessa in ambedue le direzioni, parallela e normale alla superficie libera, nel qual caso la tensione superficiale e le corrispondenti ascensioni capillari dei liquidi sarebbero ridotte sensibilmente a zero (2). A misura dunque che cresce il calorico, crescerà l'evaporazione, ma diminuirà la tensione superficiale dei liquidi, appunto come abbiamo dai fenomeni capillari.

Passaudo ora all' applicazione degli esposti principî cominceremo coll'osservare che ammessa la teoria meccanica delle azioni molecolari, il bagnarsi o non bagnarsi di un solido a coutatto di un liquido non può dipendere da altro che dal diverso grado di rarefazione prodotto nell'etere circostante dai movimenti molecolari del solido da una parte e del liquido dall'altra. Se lo strato di etere interposto fra il solido ed il liquido sia più rarefatto di quello interposto fra le molecole liquide, queste saranno spinte verso la parte ove è minore la resistenza, cioè verso il solido e le più prossime vi rimarranno aderenti, ossia lo bagneranno. Al contrario se fra il solido ed

---

(1) Dalle sperienze di Brünner, Wolf e Desains abbiamo che la diminuzione media dell' ascensione capillare dell' acqua per un grado C. è 0,00182; laddove la sua variazione media di densità per ciascun grado da 0° a 100° non è che 0,00045, cioè appena la quarta parte.

(2) L'uguaglianza di livello all'esterno e nell'interno dei tubi capillari di vetro fu da M. Wolf osservato in vari liquidi, che venivano scaldati in vasi chiusi ermeticamente onde impedirne l'ebollizione. Per l'etere solforico lo zero di ascensione capillare, epperò di tensione superficiale fu da lui trovato ai 190.°

il liquido l'etere si trovi meno rarefatto che fra le molecole liquide, queste tenderanno a scostarsi dal solido, il quale perciò rimarrà asciutto. Quando dunque un liquido viene a contatto di un solido capace di essere bagnato, l'equilibrio della superficie liquida rimarrà turbato e le sue molecole saranno spinte là ove l'etere è più rarefatto cioè verso il solido, sicchè attorno a questo il liquido si solleverà e continuerà a sollevarsi finchè il peso del volume sollevato ristabilisca l'equilibrio nella tensione superficiale del liquido. Questo peso però sarà diverso secondochè il solido sia o no già bagnato del liquido in cui s'immerge; perchè in ambidue i casi non è la stessa la natura delle molecole che agiscono sull' etere interposto fre le due superficie (1).

Che se il solido che viene a contatto di un liquido non sia capace di essere bagnato, la densità dell' etere in tal caso dovendo essere maggiore fra il solido ed il liquido che fra le molecole liquide, queste saranno spinte a discostarsi dal solido, d'onde nascerà che in vicinanza del solido il liquido prenda la figura convessa, e per conseguenza che la tensione superficiale cessi di essere orizzontale e prenda una direzione di alto in basso. Ciò importa che il liquido adiacente al solido per l'aumentata pressione verticale si deprima finchè la differenza di livello fra le parti più prossime al solido e le circostanti ristabilisca l'equilibrio di tensione nella superficie li-

(1) I fisici che si sono occupati dell'esatta misura delle ascensioni capillari, non convengono fra loro se la natura del solido abbia o no influsso sull'altezza a cui si sollevano i liquidi. Alcuni come Hagen e Wertheim (V. *Pogg. Ann.* 1846 *ed Ann. de chim. et de Phys.* 1861) negano che la natura del solido influisca sulle ascensioni capillari dei liquidi. Altri al contrario come Linck e Wilhelmi (V. *Pogg. Ann.* 1834—1863) affermano che l'altezza a cui giungono i liquidi nei tubi capillari varia colla natura del solido. Se i principî da noi adottati sono giusti, si dovrà dire che trattandosi di solidi perfettamente asciutti la natura del solido non può essere indifferente, perchè variata questa debbono in generale variare i movimenti molecolari e quindi lo squilibrio di tensione della superficie liquida. Ma quanto ai solidi già bagnati del liquido in cui s' immergono sembra che la loro azione debba limitarsi a far variare la spessezza dello strato liquido che li bagna. Onde in pratica questa azione si può trascurare, perchè la spessezza dello strato liquido aderente è sempre tanto piccola che le sue variazioni non oltrepassano i limiti degli errori d' osservazione. Quando dunque si dice che nelle ascensioni capillari il solido non ha altra parte che di servire di sostegno al liquido che lo bagna, ciò non deve intendersi dei solidi asciutti, ma di quelli già bagnati dal liquido in cui s'immergono e nei quali la spessezza dello strato liquido è tale da rendere del tutto insensibile l' ulteriore azione del solido. In questo caso lo squilibrio di tensione superficiale del liquido essendo unicamente prodotto dalla rarefazione dell' etere in vicinanza dell'angolo formato da due superficie dello stesso liquido sarà sempre maggiore che su tutti gli altri punti delle superficie medesime e indipendente dalla natura del solido. Del resto la discrepanza dei risultati ottenuti dai diversi sperimentatori si deve in gran parte attribuire alla difficoltà di mantenere le superficie dei corpi affatto prive di sostanze eterogenee, bastando il solo contatto anche momentaneo del polviglio atmosferico e dell' aria specialmente umida per alterare sensibilmente quei risultati.

quida. È quindi facile intendere il significato della espressione frequentemente usata, che nei liquidi dalla figura concava deriva una forza ascensionale e depressiva dalla convessa; perchè nel primo caso la tensione superficiale è diretta dal basso in alto, epperò si oppone alla gravità e nel secondo dall'alto in basso, e così cospira colla gravità.

Alcuni fisici hanno creduto che non avvenga mai alterazione di equilibrio nei liquidi pel contatto di solidi incapaci di essere bagnati, ma che la depressione osservata debba sempre attribuirsi al contatto di due superficie liquide dotate di molto diversa tensione superficiale (1). Se fosse così bisognerebbe dire che l'adesione fra un liquido ed un solido incapace di essere bagnato è sempre sottosopra uguale alla coesione fra le molecole del liquido; cosa che non è conforme al fatto che uno stesso solido non aderisce colla medesima forza ai diversi liquidi che non lo bagnano. Di più a tutti è noto che il mercurio si deprime nelle canne barometriche anche quando sono perfettamente purgate dal vapor d'acqua e dall'aria. Del resto il caso di due liquidi non atti a mescolarsi e dotati di molto diversa tensione superficiale non differisce gran fatto dal caso di un liquido e un solido incapace di essere bagnato. Imperocchè sebbene un liquido che ha minore tensione superficiale possa diffondersi sulla superficie di un altro liquido che l'ha maggiore, non però questo si potrà stendere sulla superficie del primo, perchè impedito dall'etere soprastante tanto più denso quanto è maggiore la differenza fra le tensioni superficiali dei due liquidi (2).

E così vediamo che l'acqua si spande sulla superficie del mercurio, il quale ha tensione superficiale quasi sette volte maggiore; laddove il mercurio a contatto dell'acqua conserva la forma globosa, nello stesso modo e per la stessa ragione che la conserva a contatto del vetro e degli altri corpi che non sono da esso bagnati. Così pure vediamo che una goccia di essenza di trementina o di altro olio volatile o fisso avente tensione assai minore dell'acqua, vi si diffonde sopra e la copre di un velo tanto tenue da produrre i colori delle lamine sottili. Ma per quanto tenue sia questo velo la tensione superficiale rimane alterata per modo che un'altra goccia del me-

(1) V. Wertheim – Ann. de Chim. et de Phys. 1861.

(2) Anche nei liquidi capaci di mescolarsi si può vedere la resistenza che il liquido dotato di più debole tensione superficiale oppone all'altro nell'atto di mescolarsi. Un esempio assai rimarchevole ce lo porge l'alcool allorchè se ne lasciano cadere alcune gocce sopra uno stratarello d'acqua. Si vede questa essere fortemente respinta dal luogo ove è caduto l'alcool, nè ritorna al posto di prima se non dopo che i due liquidi hanno cominciato a mescolarsi per modo che nei punti di contatto le due superficie abbiano acquistata quasi la stessa tensione.

desimo liquido versatavi sopra non vi si diffonde come la prima e spesso anche vi resta sotto forma di goccia. Quindi apparisce quanto poca parte possano avere nella tensione superficiale i movimenti delle molecole che non costituiscono la superficie libera dei corpi. E che lo stesso debba dirsi delle ascensioni e depressioni capillari chiaramente lo dimostra il curioso fenomeno notato per la prima volta da M. Quincke (1), cioè che se in un tubo capillare immerso nell'acqua s'introduce una stilla d'alcool in maniera che vada a spandersi sul menisco terminale, l'altezza della colonna liquida sul livello esteriore diminuisce di circa la metà, ossia si riduce tale che il suo peso eguagli quello che avrebbe se il tubo pescasse nell'alcool invece dell'acqua. Il medesimo risultato si ottiene quando in cambio dell'alcool si adopera l'olio d'oliva, l'essenza di trementina o altro liquido più leggero dell'acqua.

Sarebbe cosa superfla l'insistere di vantaggio sulle applicazioni degli esposti principii agli altri fenomeni capillari, perchè tutti sono conseguenze delle alterazioni di livello che avvengono nei liquidi quando le loro superficie piane prendono la forma concava o convessa. Ma non voglio omettere di notare che la capillarità non è l'unico effetto delle azioni molecolari di cui i suddetti principii ci rendono ragione. Molti altri di tali effetti e anche tutti possono attribuirsi allo squilibrio prodotto nell'etere dai movimenti che animano le molecole dei corpi. Ne accennerò uno solo che ha grande analogia colla capillarità, voglio dire la *diffusione*, cioè quel mutuo penetrarsi che si osserva nei liquidi quando vengono a contatto o immediatamente o per mezzo di un solido avente azione capillare sopra uno almeno di essi. L'unica condizione necessaria affinchè due liquidi venuti a contatto immediato penetrino l'uno nell'altro è che i due liquidi sieno atti a mescolarsi. Tali poi saranno sempre che l'etere interposto fra le molecole eterogenee sia più rarefatto di quello esistente fra le molecole omogenee, le quali perciò saranno spinte ad aumentare l'ampiezza delle loro escursioni (2) verso la parte ove è minore la resistenza e così a poco a poco i due liquidi ver-

(1) V. Poggen. Ann. 1870.

(2) Questo incremento delle escursioni molecolari viene confermato dalla perdita di forza viva, cioè dal raffreddamento, che si osserva nella diffusione dei liquidi. Siffatto raffreddamento non si manifesta nella diffusione dei fluidi aerei; d'onde possiamo inferire che sebbene la diffusione dei liquidi presenti grande analogia con quella dei fluidi aerei, pure ambidue questi fenomeni non hanno la stessa origine. L'enorme velocità di proiezione da cui sono animati i fluidi aerei fa che venuti essi a contatto si mescolino assieme qualunque sia la loro natura, senza che vi sia bisogno di una pressione estrinseca perchè le molecole di uno si insinuino fra quelle dell'altro.

ranno a mescolarsi, finchè in ogni punto della mescolanza l'etere intermolecolare abbia acquistato una densità uniforme. La qual cosa tanto più prontamente deve accadere quanto la temperatura sia più elevata, come fu dimostrato da Graham (1) con numerosi esperimenti. Perchè col crescere del calorico diminuendo la coesione ed aumentando le escursioni molecolari, le molecole omogenee possono più facilmente separarsi ad accostarsi alle eterogenee.

Che se la diffusione non si operi immediatamente, ma per l'intermedio di un solido capace di azione capillare sull'uno almeno di due o più liquidi atti a mescolarsi (nel qual caso chiamasi *osmosi*) le leggi sono diverse; ma i principî che possono servire a spiegarle razionalmente sono gli stessi. Queste leggi si riducono alle seguenti:

1.° Nell'osmosi per lo più i liquidi non si mescolano nel medesimo rapporto da ambe le parti del solido interposto.

2.° E nell'attraversare questo corpo spesso cambiano costituzione.

3.° Quantunque anche l'osmosi cresca colla temperatura, pure non cresce nello stesso rapporto della diffusione immediata.

A dare ragione di queste leggi mediante lo squilibrio prodotto nell'etere dai movimenti molecolari, basterà osservare che nell'osmosi il contatto si opera in forza della capillarità, epperò che quanto maggiore sarà questa forza, tanto più prontamente i liquidi verranno a mutuo contatto ed in tanto maggiore copia si potranno mescolare assieme. Ho detto *si potranno*, perchè venuti i liquidi a contatto siamo nel caso della diffusione semplice, la quale si fa con diversa prontezza nei diversi liquidi. Affinchè dunque due liquidi separati da un solido permeabile ad ambidue si mescolino nello stesso rapporto dall'una e l'altra parte del solido, è necessario che l'azione capillare su quei liquidi sia la stessa, e che la stessa pure sia la loro diffusibilità relativa od almeno che le differenze fra le azioni capillari e le diffusibilità relative si compensino esattamente.

La seconda legge è una conseguenza della prima, imperocchè se i liquidi sottoposti alla sperienza non sieno omogenei, ma risultino di una miscela di vari liquidi, non potendo in generale essere la stessa la diffusibilità relativa dei costituenti il miscuglio, nè l'azione capillare del solido sui costituenti medesimi, quei liquidi cambieranno costituzione, ossia gli elementi eterogenei che li compongono dopo attraversato il solido non si troveranno

(1) V. Philos. Trans. 1861.

mescolati assieme nelle proporzioni primitive (1). Su questo fatto è fondata la *dialisi*, voglio dire la separazione più o meno completa delle mescolanze liquide mediante l'osmosi attraverso le membrane animali o vegetali. Che poi gli effetti del calorico sull'osmosi debbano essere diversi da quelli che il calorico produce sulla diffusione semplice, ognuno ne vede la cagione nella capillarità, che variando anche essa colla temperatura modifica il risultato dell'azione del calorico sulla diffusione. Ma ciò vale solo per il caso più comune, cioè che il corpo interposto fra i due liquidi sia solido. Che se l'osmosi si faccia per l'intermedio di un terzo liquido, l'azione del calorico segue la stessa legge in ambidue i casi della diffusione semplice e dell'osmosi attraverso un liquido. Un esempio di questa specie di osmosi ci è offerto dal cloroformio ed etere solforico separati da uno strato di acqua. Dopo qualche tempo si trova tutto l'etere scomparso ed il volume del cloroformio aumentato, senza che quello dell'acqua sia cresciuto sensibilmente. Ripetendo lo stesso sperimento a diverse temperature, la rapidità dell'osmosi varia secondo la legge della diffusione immediata dell'etere solforico nel cloroformio.

(1) Anche per semplice diffusione senza bisogno di membrane o di altri corpi capaci di azione capillare, talvolta si ottiene la parziale separazione delle mescolanze liquide; nè mancano esempi di sali doppi e di veri composti che in forza della disuguale diffusibilità dei loro componenti passano in parte a stato diverso di combinazione: tali p. e. sono il solfato di alluminio e di potassio ed il bisolfato di potassio, che per semplice diffusione si scindono quello in solfato di alluminio e solfato di potassio, questo in solfato neutro di potassio ed acido solforico idrato.

COMUNICAZIONI

Statuti, Ing. A. — *Presentazione di una sua memoria*:

Il ch. sig. cav. Augusto Statuti, traendo motivo da una recente pubblicazione fatta dalla *Civiltà Cattolica* sull'acqua di Fiuggi, presentò una sua nuova memoria sull'azione litontritica dell'acqua suddetta; la quale memoria, atteso il ritardo della pubblicazione degli atti accademici, venne già inserita nel fascicolo della sessione III[a], A. XXXVIII.

Lais, P. G. — *Sopra un diario meteorologico del secolo XVII, e sulle Bielidi*:

Il ch. P. Giuseppe Lais nella ricerca di osservazioni meteoriche antiche diè notizia di un nuovo documento meteorologico del secolo decimosettimo, cioè di un diario meteorologico dei fenomeni atmosferici e tellurici avvenuti in Brescia dal novembre del 1686 al gennaio del 1716. Sebbene il diario per la parte meteorologica si fermi alle sole idrometeore e dia soltanto un cenno di osservazioni termometriche, pure per l'età remota, in cui fu redatto, per la esatta indicazione del luogo di osservazione e per i minuti e numerosi dettagli, merita di essere preso in speciale considerazione. Il manoscritto, posseduto dalla nobilissima famiglia Averoldi di Brescia, fu lavoro di Giulio Antonio Averoldi, archeologo bresciano, nato in Venezia il 6 gennaio 1631 dal cav. Gio. Battista e da Violante Fè, esso fa parte di una grande raccolta di memorie storiche, politiche, economiche ed archeologiche in ventidue volumi, che si conservano presso la famiglia. Il diario meteorologico è redatto sull'osservazione immediata del cielo, giorno per giorno; e contiene una pazientissima raccolta 1. dei giorni di bel tempo e dei giorni nuvolosi; 2. dei giorni di pioggia con indicazione della durata (di giorno e di notte); 3. dei giorni di neve con la distinzione di neve al piano e di neve a monte; 4. dei giorni di folgori, tuoni e lampi; 5. dei giorni di ghiaccio o brina; 6. dei giorni di nebbia e grandine. Vi hanno poi notizie di cicloni, di bolidi, di terremoti, di vulcani ed anche osservazioni fenologiche e politiche. Il volume è segnato V. 12 Archivio Averoldi, « Memorie storiche di Giulio Antonio Averoldi » e nella prima pagina « Memorie di ciò che giornalmente accade disteso per mia particolare soddisfazione e diletto, cominciando al principio d'ottobre 1682. » Il volume è legato in mezza pelle con pagini non numerate. Le pagini sono scritte a doppia co-

lonna alte cent. 30 × 19. Deve poi il riferente alla gentilezza di mons. Luigi Francesco Fè di Ostiani di aver avuto tra mani il pregiato volume, dal quale ha estratto le notizie meteoriche più importanti, di cui darà un cenno in altra sua comunicazione.

Sull'argomento poi del grandioso fenomeno della pioggia straordinaria delle stelle cadenti del 27 novembre 1885 trattato nella seduta precedente dal ch. P. G. Stanislao Ferrari, deve il riferente notare di essere stato egli il solo in Roma a prendere parte diretta all'osservazione, per quanto permetteva lo stato atmosferico. I risultati di quell'osservazione vennero da lui pubblicati nei numeri 273 e 281 del giornale *La Voce della Verità*. Con una prima ispezione del cielo nel giorno 29 precedente al fenomeno constatò una frequenza di 100 cadenti all'ora, e si trovò così al preludio del fenomeno, che avendo avuto una durata maggiore di 24 ore, notò che sarebbe stato osservato dall'intero nostro globo. Il turbamento atmosferico del 27 limitò la sua osservazione a qualche squarcio di cielo; dalle ore 7,50m alle 8,14m constatò la comparsa di 165 cadenti di varia grandezza. Il fenomeno per la sua imponenza rassomigliava ad un bombardamento: ed egli ne riconobbe fino dal primo istante la sede principale del radiante nella costellazione di Andromeda.

Con l'appellativo di Bielidi (1) il Prof. Schiaparelli ha definitivamente legato questo sciame di stelle cadenti alla cometa di Biela. Egli vede in questa straordinaria comparsa un fenomeno concomitante la detta cometa, che dice probabilissimamente associata alla corrente delle cadenti. Infatti nella memoria letta al R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 18 Dicembre 1885 dice che « il periodo del ritorno di queste stelle cadenti dobbiamo sup-
» porlo prodotto da un anello meteorico non ancora completo, del quale
» soltanto una piccola porzione sia occupata da una corrente o sciame
» molto denso di stelle cadenti. La circostanza ben nota che radiante e
» nodo di questa corrente sono identici (entro ai limiti di esattezza che
» tale materia comporta) con quelli che la cometa detta di Biela ha (se essa
» ancora esiste) o con quelli che devono avere le sue parti (se essa si è
» ultimamente sfasciata), rende estremamente probabile che corrente e co-
» meta siano intimamente associate. » E poco più oltre sotto il numero IV:
« Dico inoltre molto verosimile, che il tempo rivolutivo della corrente sia
» identico a quello della cometa; che non solo percorrano la stessa orbita,

(1) Lettera del Prof. Schiaparelli al P. Lais.

» ma l'una e l'altra s'accompagnino lungh'essa, restando la cometa immersa
» nella corrente o almeno ad essa molto vicine ». Il sullodato professore
trova poi come limite inferiore dell'ampiezza dell'arco, su cui al giorno
d'oggi è dispersa la materia della cometa, 1|30 della intera rivoluzione, e
per il limite superiore dell'estensione della corrente 1|6 dell'intera rivoluzione.

La competenza di una tale autorità come quella del Prof. Schiaparelli
rende prematuro un giudizio tanto nel sostenere l'esistenza ancora della cometa, quanto nel dichiararla disfatta e risoluta.

E qui cade in acconcio considerare il riavvicinamento delle comete alle
stelle cadenti generato da coincidenze svariatissime. La prima coincidenza è
quella del piano nel quale si muove la cometa: questo piano può avere
per se una infinità di posizioni, purchè passi pel centro del Sole; anche le
orbite delle cadenti possono trovarsi in una infinità di piani condotti per
lo stesso centro del Sole: tuttavia i piani coincidono perfettamente. Ma vi
ha di più, non solamente i piani coincidono, ma le direzioni degli assi
maggiori delle orbite sono coincidenti, e ognun vede come altro caso fortuito dovrebbe dirsi anche questo, perchè l'angolo si annulla mentre potrebbe variare da 0 a 180 gradi. E quasi ciò fosse poco vi si aggiunge la
coincidenza della più corta distanza dell'orbita al sole.

Un simile accumulamento di coincidenze, così prende a dire l'astronomo
reale d'Irlanda Sig. Ball, prova fino all'evidenza, che esiste qualche legame
fisico tra le comete e la corrente delle cadenti. Tutti i fatti osservati ricevono una spiegazione, ammesso che la cometa sia preceduta o seguita
nel suo tragitto da una corrente meteorica: in realtà questa ipotesi implica
una relazione molto intima tra la cometa e le meteoriti, sebbene non sia
possibile attualmente di stabilire la vera natura di questa relazione.

Il P. Secchi nell'opera del *Soleil* esposta la teoria dello Schiaparelli sulle
stelle cadenti, trova un argomento per concludere, che le comete non sono
che grandi stelle cadenti o piuttosto ammassi di meteore derivate da masse
nebulose straniere al nostro sistema planetario, e che è ben vero come altra
volta era stato dal medesimo riconosciuto, che una cometa incontrando la
terra produrrebbe semplicemente l'aspetto di una pioggia di stelle cadenti.
In tal modo la teoria di queste stelle rientra in quella delle comete con la
differenza, che le comete sono per la loro intrinseca visibilità riconoscibili
a grandissima distanza dalla terra, mentre per le cadenti che si rendono
visibili per attrito nell'aria è necessaria una prolungata immersione della
terra nella corrente meteorica.

Intorno ad altri ravvicinamenti di costituzione chimica tra comete e stelle cadenti lo spettroscopio fornisce nuove prove. Infatti trova il P. Secchi che le stelle cadenti sono della stessa natura degli aeroliti con la differenza, che questi sono composti da una massa più grande e più compatta, non bruciano completamente nell'aria, si fondono e si vetrificano alla superficie soltanto, in quello, che le stelle cadenti sono completamente volatilizzate. Il P. Secchi soggiunge che il Sig. Wright ha provato, che gli aeroliti hanno le stesse sostanze e combinazioni idrogeniche che lo spettroscopio ha constatato nelle comete, ed adduce l'esempio di parecchi meteoriti contenenti il carbonio, che trovasi nello spettro delle comete, deducendo una stretta connessione tra comete, aeroliti e stelle cadenti.

Ferrari, P. G. S. – *Intorno alla pioggia delle stelle cadenti del 27 Novembre 1885*:

Il ch. P. G. Stanislao Ferrari riferì alcune riflessioni inserite nella Nota letta dal ch. prof. Schiaparelli all'Istituto Lombardo intorno alla recente grande pioggia di stelle cadenti del 27 novembre 1884, le quali confermano quanto egli disse nella Sessione precedente intorno all'intima connessione delle Bielidi colla cometa di Biela. Tale connessione non implica di sua natura la ragione di causa e di effetto, come si volle da taluno. Citò a questo proposito la numerosa apparizione di stelle cadenti osservata dal Brandes nel 1798 e da altri nel 1805, anche essa connessa colla cometa di Biela, eppure allora essa era visibile.

Finalmente conchiuse colle parole dello stesso chiarissimo professore, che cioè « sarebbe opera di grande presunzione il voler annunziare i prossimi ritorni di questa pioggia meteorica. Ciò non si potrà fare fintantochè non saranno meglio note l'estensione e la forma della corrente associata colla cometa di Biela. Ora tale investigazione è diventata molto più difficile dopo la disparizione di questa cometa, la quale avrebbe potuto servire d'indice per conoscere i movimenti della corrente. Ormai questa non si potrà più esplorare che nei punti ove la Terra vi s'immerge ed anche fra un'immersione e l'altra poco sapremo di quanto la cometa sia progredita nello spazio. Ci troviamo così nelle condizioni di un cieco, il quale debba definire la grandezza e la forma di un corpo toccandolo soltanto in alcuni punti isolati e mentre esso si muove.

« Nondimeno la circostanza che la cometa di Biela faceva quasi esattamente 3 rivoluzioni in 20 anni, nel tempo in cui fu visibile, c'induce a sospettare che lo stesso press'a poco debba avvenire anche per le meteore,

e pertanto che si possa ammettere sul fine di novembre 1899 una posizione di cose poco diversa da quella che ebbe luogo il 27 novembre 1872. Non diremo dunque, che intorno al 26–27 novembre 1892 *accadrà* un'altra grande pioggia meteorica; ma piuttosto che in quell'epoca *si dovrà stare attenti per vedere* se una tal pioggia veramente si produrrà ». Fin qui l'illustre scienziato.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo del Prof. R. Fagioli*:

Il Prof. M. S. de Rossi presentò a nome dell'autore socio corrispondente, prof. canonico Romeo Fagioli, direttore dell'Osservatorio Meteorologico di Narni, un suo lavoro intitolato « Prontuario di Latitudini e » longitudini in gradi e tempo ridotte al meridiano di Roma ad uso degli » Osservatori astronomici, meteorologici, e sismici per l'Italia e confini. » Nel far tale presentazione il Prof. de Rossi spiegò alquanto l'uso prattico del lavoro e le sue applicazioni varie alla comodità degli studiosi, nonchè dell'insegnamento,

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

Annunzio della morte del socio corrispondente Ingegnere Conte Ademaro Giovanni Claudio Barré de Saint–Vénant avvenuta mercoldì 6 Gennaio, alle ore 5 pom. nel suo castello di Villeporcher–Saint–Ouen presso Vendôme, all'età di 88 anni e mezzo.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE.

Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Cav. A. Statuti. – P. G. Foglini. – Ing. F. Guidi. – P. G. Lais. – Ing. G. Olivieri. – P. F. S. Provenzali. – Prof. V. De Rossi Re. – Prof. G. Tuccimei. – Comm. C. Descemet. – P. F. Ciampi. – P. G. St. Ferrari. – Prof. M. S. de Rossi, Segretario.

Corrispondenti: Mons. B. Grassi–Landi.

Aggiunti: Marchese Ing. L. Fonti.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Roma.* — A. IX. — fasc. 3°, — Roma, 1886, in-4°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXI, 1883–84. Serie terza. — Memorie. Vol. XIII, Vol. XIX. Roma, 1884, in-4° — A. CCLXXXIII, 1885—86, Serie quarta. — Rendiconti. Vol. II, fasc. 2, 3, 4, — Roma, 1884, in-4°
3. *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere, ed Arti.* — T. IV, Serie VI, disp. 1. — Venezia, 1884—85. In 8.°
4. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A. XI, n° 7. — Roma, 1885, in-8°
5. *Crónica cientifica.* — A. IX. N. 194, 195, 196. — Barcelona, 1886. In-8.°
6. F. R. — *Prontuario di latitudini e Longitudini, ecc.* — Torino 1885, in-4°
7. HAYNALD D.r L. (Card.) — *Denkrede auf D.r Eduard Feuzl.* — Buda-Pest, 1885, in-8°
8. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVI, serie XII, Vol. XII, quad. 852. — A. XXXVI, Serie XIII, Vol. I, quad. 853. — Firenze 1885, 1886. In-8.°
9. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.*— Deuxième série. T. XII. — 1e et 2e livraison. — *Partie littéraire.* — IIe série, — T. XIII, 1e et 2e livraison. — Paris, 1886. In-8.°
10. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1885. — Bollettino n. 11 e 12. 1885. Roma, 1885. In-8°
11. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — A. 1886. — Vol. I. — Roma, 1886. in-8.°
12. TODARO (A.) — *Hortus botanicus Panormitanus, etc.* — Tomo II, Fasc. IV. — Panormi (s. a.) In-f.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE IVª DEL 21 MARZO 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

LE DOSI INFINITESIMALI DEI MEDICAMENTI HAHNEMANNIANI CONSIDERATE IN RAPPORTO DEGLI AGENTI IMPONDERABILI

NOTA

DEL PROF. FRANCESCO LADELCI

Già in altro mio lavoro, che ebbi l'onore di presentare nelle nostre accademiche sedute, rammentai come il sommo naturalista Carlo Linneo fosse portato ad esclamare: *Natura admiranda in minimis*. Egli peraltro comprese in questi esseri quanto vi ha di minime forme negli organici, i quali a lui si mostravano tanto più ammirabili, quanto più erano queste eleganti e quanto più la loro vita era attiva, sia nelle funzioni della nutrizione, sia in quelle della loro riproduzione. Ma io soggiungeva che la nostra ammirazione può accrescersi ancora se ci facciamo a considerare quale e quanta possanza di azione e di effetti ci presenti anche la materia inorganica allorchè venga suddivisa, e sia ridotta a quello stato che dicesi imponderabile, ossia etereo, che a noi si manifesta sotto le varie apparenze di calore, di luce, di elettrico, essendo che questo, con la sua sorprendente azione, vivifica l'universo creato, riempiendo esso ogni spazio esistente fra corpo e corpo sia celeste, sia terrestre, e tutti compenetrando gli es-

seri, tanto inorganici che organici, è causa del moto che costituisce le varie forze che i fisici riconoscono nei primi; come ancora è causa dei vitali fenomeni che i fisiologi rilevano nei secondi.

Tale era il parere dell'illustre autore dell'opera che ha il titolo « L'unità » delle forze fisiche », il fu P. Angelo Secchi Presidente di questa nostra Accademia; e sembra che a questa unità volesse alludere l'antico padre della medicina Ippocrate di Coo, come già in altra occasione riferii, allorchè scrisse: « Plerumque enim hominis natura universi potestatem non superat ». Vale a dire che la stessa materia, e la stessa forza che insieme compongono e vivificano il regno inorganico, mirabilmente modificate, sono destinate a dare organizzazione e vita a quello organico.

Come ognun vede io torno sull'argomento dell'etere vitale, quale dipendenza dall'etere universale, non solo per confermare sempre più la detta teoria dell'unità delle forze fisiche; ma ancora per meglio spiegare ed avere ragione dell'azione nel nostro organismo delle sostanze ridotte in stato di semplici effluvii; od anche artificialmente rese in frazioni millesimali, milionesimali . . . . in somma nello stato d'imponderabili.

Di fatti a tutti sono noti i tristi effetti che gli acuti odorosi effluvii, p. e. del muschio, dei gigli bianchi, delle rose di maggio, delle cardenie, delle magnolie, delle tuberose producono nelle persone molto sensibili: nè alcuno è risparmiato dal *Rhus toxicodendron*, che produce gravissime eresipele sol che gli si resti dappresso: e più tristi ancora sono gli effetti dell'Upas che co'suoi venefici effluvii priva della vita. A tale proposito rammento ancora come oggi sia invalsa la consuetudine nell'esercizio della chirurgia di astenizzare, ossia di rendere insensibile il sistema nervoso nell'eseguire le grandi operazioni, facendo semplicemente respirare ai pazienti o l'etere solforico, od il cloroformio; pratica che se apporta grande conforto ai miseri infermi, merita peraltro grandissima circospezione per parte degli operatori; essendo che l'astenizzazione non raramente arriva sino alla estinzione della vita!

Che più! Quale perturbamento non proviamo noi, non solo nel morale, ma ancora nelle organiche funzioni per i patemi di animo, cause affatto immateriali? Queste possono anche istantaneamente uccidere, ancorchè trattisi non di cosa dispiacevole ed offensiva; ma ancora di una gioia improvvisa, come avvenne a quella madre romana, la quale sentito avendo estinto il proprio figlio nella battaglia di Canne, ed invece vedendolo tornare, per l'improvisa ed eccessiva gioia che ne provò, restò priva di vita fra le braccia di lui.

Questi argomenti di fatto, uniti agli altri che io ho riferiti nei miei antecedenti lavori, ci confermano sempre più nel riconoscere che la nostra esistenza è dipendente e sorretta da un fluido imponderabile che può essere più o meno gravemente perturbato e sconvolto nei suoi normali movimenti, o da cause materiali anche ridotte in istato di semplici effluvii, o da cause immateriali che affettino la di lui squisita mobilità.

Ciò posto, quale maraviglia se noi possiamo risentire l'azione delle sostanze medicamentose anche suddivise in frazioni millesimali, milionesimali.... insomma ridotti allo stato d'imponderabili? Io alludo ai medicamenti preparati a modo di Hahnemann, e somministrati dietro l'indicazione curativa della legge dei simili, come egli prescrive; vale a dire in quelle forme morbose le quali presentano sintomi simili a quelli che sull'uomo sano sogliono produrre certi dati rimedi. Ciò per altro io intendo esporre non come soggetto di medicina, ma come un'altro argomento fisico e fisiologico che può dare nuovi lumi sia per la divisibilità dei corpi, sia per confermare sempre meglio il meccanismo della vita negli esseri organici sostenuta, come si è detto di sopra, da un fluido etereo; ed in fine per rilevare se sia esatta la distinzione che si fa dai fisici della elettricità nei soli due stati di positiva e di negativa.

Io mi propongo di fare delle osservazioni sopra questi punti, ma è necessario che premetta un brevissimo sunto storico intorno l'operato di Hahnemann per informarne coloro che di ciò non si fossero ancora occupati.

Il Dott. Samuele Hahnemann, nato in Coeten, città sassone, nell'anno 1750, e morto in Parigi nel 1844, fu dotato di profondo criterio e di spirito indagatore, per cui oltremodo dedito agli studi, specialmente medici e chimici. Come tutti gli altri esercenti l'arte salutare ben presto dovette riconoscere la instabilità de'medici sistemi, la incertezza del medico esercizio, e spesso il danno ancora anzichè l'utile che la medicina apportava agli infermi. Quindi davasi tutt'uomo a studiare se fosse stato possibile rinvenire una via che meglio avesse appagate le brame dei medici stessi, e fosse stata agl'infermi più utile e salutare. In questo suo fermo proposito avvenne che, traducendo egli dall'idioma tedesco all'inglese la materia medica del Dott. Cullen, già suo maestro, vide che nell'articolo China questo autore riferiva le varie ipotesi con le quali più medici procurato aveano di spiegare come questa droga guarisse le febbri miasmatiche palustri. Ma lo spirito indagatore di Hahnemann non era certamente appagato da tutto ciò che fosse ipotetico; il suo obbiettivo era solo il vero, il reale, il positivo, e per

raggiungerlo egli sottopose sè stesso, che era in perfetto stato di salute, all'esperimento della china, e ciò fece dietro quanto avevagli insegnato lo stesso Cullen, il quale nelle sue lezioni sosteneva che il miglior modo di conoscere quale fosse la vera azione dei rimedii era quello di sperimentarli sull'uomo sano. Questo esperimento portò Hahnemann alla cognizione che la china produce una febbre, la quale si manifesta con sintomi simili a quelli prodotti dal miasma palustre.

A chi volesse mettere in dubbio questo fatto, dal quale è derivato poi un totale cambiamento nella teoria e nella pratica medica, io potrei citare l'autorità dello Chevalier, il quale, in un lavoro presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi, a dì 7 Ottobre 1850, riferì che Zinner, fabbricatore del solfato di chinina a Francfort, avea rilevato che gli operai i quali polverizzano la china soffrono frequentemente di una febbre ch'egli chiama febbre chinica.

Intanto da questo risultato Hahnemann sospettò della legge de'simili come indicazione curativa, e scrisse nella detta sua traduzione le seguenti parole: « Probabilmente la china toglie le febbri periodiche perchè è capace di » produrle ». Quindi egli si convinse interamente della realtà della detta legge curativa allorchè nei suoi studi teoretici la vide già stabilita da antichi scrittori incominciando da Ippocrate, il quale, nel libro « De locis in » homine » si esprime così: « Et optimum fuerit sic curare aegrotos per » has quae morbos faciunt ». Un rilevantissimo numero di splendide guarigioni ottenute anche da medici posteriori ad Ippocrate, operate da rimedi i quali producono malattie analoghe, fecero risolvere Hahnemann a proseguire l'esperimento de'farmachi sopra sè stesso, e con questi duri esperimenti egli compose la sua materia medica che dice *pura* perchè scevra da ipotesi relative all'azione generica dei farmachi, delle quali si compongono le materie mediche date da autori a lui anteriori.

Ed ecco Hahnemann alla pratica medica con nuove armi; vale a dire con nuovi principii da lui rivendicati alla medica scienza, e con nuovi medicamenti, sicuri nella loro azione. Se non che questi amministrati con l'indicazione della detta legge de'simili, alle dosi di uno o più grani apportavano delle esacerbazioni intollerabili agli infermi. Ma Hahnemann, nella intima persuasione della realtà della detta legge curativa, vide la necessità di attenuare le dosi dei rimedi, ed a lui non mancava certamente nè criterio per trovare un modo di giusta applicazione, nè cognizioni fisiche e chimiche, affinchè i medicamenti conservassero nella preparazione tutta la

loro attività anche suddivisi. Questa suddivisione peraltro riuscì di grande sorpresa allo stesso operante, e feconda di nuove inaudite scoperte.

Hahnemann, come abilissimo chimico, insegna prima il modo di depurare i minerali da ogni sostanza eterogenea; quindi prende un solo grano di quello che vuol preparare e l'unisce a grani cento di zucchero di latte, come sostanza neutra. Tritura questa miscela per lo spazio di un'ora intera, entro un mortalino di agata o di porcellana non verniciata. Dipoi unisce un grano di questa prima triturazione con altri cento del detto zucchero di latte, e nello stesso modo lo tritura per un'altr'ora; così fa per una terza triturazione; dopo la quale, secondo il suo avviso, ogni sostanza così lungamente triturata rendesi solubile nell'alcool rettificato; di modo che la quarta divisione, sempre centesimale, la forma con questo solvente, mettendone cento gocce in un vasello, con un grano della detta terza triturazione, e questa scuote fortemente, come fa delle diluzioni successive.

Ognuno comprende che alla detta quarta suddivisione noi già siamo alla 100,000^{ma} parte del grano primitivo, se vogliasi tener conto della sua materiale divisione moleculare.

Delle sostanze vegetali Hahnamann forma delle infusioni nell'alcool, in date proporzoni di questo liquido con il succo delle piante se fresche, o con la polvere di esse se secche; e queste infusioni chiama tinture madri. Una goccia di questa tintura diluita in cento di alcool forma la prima diluzione, che scuote fortemente, e così di seguito passa alla seconda, alla terza, alla quarta . . . . sempre scuotendole come si è detto di sopra.

Taluno farà qui le maraviglie e giudicherà impossibile l'azione di rimedi ridotti a queste proporzioni millesimali, milionesimali . . . . Eppure Hahnemann facendosi guidare non dal giudizio *a priori*, ma dagli effetti che negli infermi vedeva insorgere dietro l'amministrazione dei rimedi così preparati, ed amministrati sempre dietro la detta legge de' simili, non si arrestò qui, ma portò le dette suddivisioni sino alle trentesime; anzi per ripartire una goccia di queste, immaginò di bagnarvi dei globuli amilaceo-zuccherini, de' quali amministrava due o tre solamente agli infermi; e così arrivò a conseguire il suo intento di vincere cioè il male senza turbamento od esacerbazione medicinale, almeno nel massimo numero dei casi.

Le veramente ammirabili guarigioni che si ebbero da questi rimedi così preparati sorpresero grandemente molti già provetti medici, i quali videro sanati non pochi infermi da loro creduti incurabili; per lo che molti di essi, prima di Germania, poi d'Italia, e segnatamente di Napoli, ed in se-

guito delle altre nazioni europee, si diedero a studiare le opere del novello maestro, e quindi a proseguirne la pratica.

Se non che questi ancora dovettero riconoscere che negli infermi dotati di temperamenti squisitamente sensibili, od in quelli estenuati dal male o dal metodo curativo, ... anche i medicamenti suddivisi e dinamizzati alle trentesime diluzioni erano capaci di promuovere spiacevoli esecerbazioni, le quali avrebbero potuto talora compromettere anche la vita degli infermi. Persuasi però dalle teorie dinamiche di Hahnemann proseguirono essi con lo stesso processo le suddivisioni centesimali sino alle duecentesime diluzioni, nelle quali si ha una frazione del grano primitivo, o della goccia di tintura madre, della quale se si volesse esprimere la divisione meccanica, converrebbe rappresentarla con una cifra algebrica composta di moltissimi numeri.

Non reca quindi maraviglia se il maggior numero dei medici, e con esso anche il pubblico trattassero Hahnemann da visionario, giudicando teoricamente, che se ben spesso molteplici rimedi, e dati a grandi dosi non riescono a guarire le malattie; molto meno potranno queste essere vinte con dosi infinitesimali di questi. Eppure ne avverte Fedro nelle sue favole:

« Non semper ea sunt quae videntur
» Decipit frons prima multos. »

Difatti, domando io, che cosa ha che fare l'amministrazione di rimedi, siano pure molti, e dati a larghe dosi, ma all'empirica, come nel maggior numero dei casi suole praticarsi dai medici seguaci delle scuole ufficiali, con quelli indicati da una legge curativa dedotta dalla costante esperienza di molti secoli? È sempre vero ciò che avverte Orazio — Est modus in rebus. — Di fatti chi volesse farsi intendere a'nostri antipodi p. s. colla detonazione di enormi cannoni non riuscirebbe certamente al suo intento, e non si potrebbe persuadere che ciò può ottenersi col mezzo di una semplice scintilla elettrica. E come ciò? Precisamente per quel *est modus in rebus*! Più ancora, che cosa ha che fare l'amministrazione di sostanze grezze più o meno inaffini al nostro organismo; anzi spesso venefiche, atte quindi pittosto a perturbare le vitali funzioni, anzichè a riordinarle nel loro stato normale, con l'amministrazione di medicamenti resi in stato di agenti dinamici, come dinamico è l'agente che regge e governa la nostra esistenza?

Il fatto sta che un numero rilevantissimo di stupende guarigioni ottenute dai detti primi seguaci di Hahnemann con i medicamenti in tal modo

preparati furono raccolte dal D.r Bovais in otto grossi volumi. A coloro poi che volessero ancora mettere in dubbio l'azione e l'efficacia di questi rimedi, io non adduco i risultati della mia pratica medica, che pur data di circa mezzo secolo; ma quella grandemente più estesa di 14 in 15 mila colleghi che oggi seguono le norme dello stesso maestro; e richiamerò la loro attenzione sui soddisfacentissimi risultati che si hanno in circa cinquanta pubblici ospedali, de' quali 38 in America, e gli altri stabiliti nelle principali città dell'Europa, ove gl'infermi sono curati con le stesse norme hahnemanniane.

Dati questi schiarimenti e posta come positiva l'azione sul nostro organismo di sostanze suddivise fino allo stato imponderabile, io volgo ai fisici ed ai fisiologi le seguenti considerazioni.

La prima che si presenta è relativa alla divisibilità dei corpi – La seconda alla natura dell'etere che da essi si svolge, specialmente col mezzo dell'attrito. – La terza riguarda l'azione che le sostanze eccessivamente suddivise possono avere sulle funzioni, o moti vitali che sostengono la vita organica-animale. – La quarta si riferisce alla natura dell'etere stesso. – La quinta è la seguente: = Ammesso che il detto etere che svolgesi da tutti i corpi riducasi allo stesso ente che a noi si manifesta con le apparenze della luce, del calore, e della elettricità, è egli esatto il considerare questa elettricità nei soli due stati di positiva e di negativa; ossia vitrea e resinosa?

Intorno la divisibilità dei corpi è da riflettersi che nessun fisico mai ha potuto stabilire qual sia il limite cui sia divisibile la materia, e se i fisici considerano in essi le molecule e gli atomi, sono questi usati come termini convenzionali per esprimere in astratto le più minute loro parti; ma da quale frazione numerica vengano queste rappresentate non è dato ad essi poterla esprimere; e se noi consideriamo che la materia ha una potente azione sopra l'animale economia anche portata ad una eccessiva suddivisione, nella quale riducesi ad uno stato imponderabile, dobbiamo anche da questo fatto riconoscere essere essa divisibile in modo indefinito.

Ma nell'operato di Hahnemann non solo è la meccanica divisione delle molecule delle sostanze medicinali che bisogna avere di mira; essendo che, come si è superiormente veduto, egli le tratta con lunghissime triturazioni se solide, o con ripetute e continuate scosse se liquide; insomma con l'attrito, per il quale mezzo noi ben conosciamo che dai corpi stessi svolgesi calore, luce, ed elettricità. E se queste non sono che le diverse apparenze di uno stesso ente, od etere, come si ritiene dai più recenti fisici, conviene ammettere

che anche dalle sostanze medicinali così trattate svolgasi questo stesso ente o principio in virtù del quale esse acquistino una possanza dinamica tanto maggiore, quanto più sono state triturate o scosse. Or bene nel nostro organismo il contatto di sostanze diverse, le continue composizioni e decomposizioni chimico-organiche, ed il continuo attrito che subiscono gli organici tessuti per il moto corporale, e specialmente per la rapidissima circolazione degli umori, sono sorgenti mai interrotte di fluido elettrico animale; altrimenti detto fluido nerveo, fluido magnetico animale, od etere vitale; e se i perturbamenti molteplici de' suoi normali movimenti, prodotti dalle cause morbose, costituiscono le nostre infermità, non è difficile comprendere come questi perturbamenti possano essere eliminati col mezzo della enunciata indicazione curativa; essendo che non mancano fatti analoghi anche nella fisica che ce ne rendano ragione. Così rileviamo che due raggi luminosi i quali obliquamente s' intersecano, nel punto della intersezione invece di doppia luce si presenta oscurità. E conosciamo ancora che due corpi elettrizzati con elettricità omologa vicendevolmente si ripellono. *A pari* un dato perturbamento vitale prodotto da un qualsiasi farmaco è naturale che elida il perturbamento analogo nell' infermo esistente, come effetto di cause morbose. Questo rimosso, le stesse forze naturali riordinate nella loro normale vigorìa rendonsi valevoli anche ad espellere dal corpo quei morbosi elementi, i quali spesso mantengono la infermità.

Queste dottrine adunque non sono contrarie alla scienza; anzi sono con essa perfettamente concordi; essendo che gli studi dei fisici, più che alla materia ponderabile siano oggi specialmente rivolti alla applicazione dell' imponderabile, ossia alla forza che questa governa.

Tutto ciò è relativo al modo di agire dell' etere che svolgesi dalle sostanze medicinali su quello che funziona nell' animale economia; ma qui nasce il desiderio di fare delle indagini relative alla natura di questo agente misterioso; vale a dire se questo consiste nella materia stessa che costituisce le singole sostanze, resa in stato imponderabile; ovvero se esso etere sia un *quid* da queste distinto, e che emanato dai centri luminosi si diffonde in ogni spazio, non solo; ma a tutti i corpi stessi si unisca e li compenetri, e quindi da essi si svolga co' mezzi indicati.

Per l'una e per l'altra ipotesi sembra che militino delle prove che possono sostenerle. In realtà non è possibile il sottoporre i corpi anche i più duri ad un continuato attrito senza che essi non perdano parte, quanto si voglia piccola, della loro sostanza, e questo vero è in favore della prima ipotesi.

Una seconda ragione che la sostiene ancora è il fatto che risulta dall'amministrazione di questi preparati hahnemanniani agli infermi, i quali, non raramente, risentono le proprietà fisiche di tali rimedi sebbene ridotti in frazioni milionesimali, biglionesimali....... A tale proposito io rammento di avere più volte amministrato agli infermi il solfo alla 200ª diluzione, senza averli di ciò avvertiti, e questi mi hanno domandato se era il solfo che essi prendevano per il forte odore che ne sentivano. In altro caso io amministrava il carbone vegetale alla stessa potenza duecentesimale, senza che l'infermo conoscesse il rimedio che prendeva; e questi mi manifestò di sentire un tal puzzo di carbone, come se nella sua camera se ne accendesse di continuo, di modo che ricusò di più prendere il detto rimedio allorchè io gli manifestai che era il carbone quello che a lui io amministrava, tanto era il disgusto che ne provava! A questi fatti potrei io aggiungere altri molti da me e dai miei colleghi osservati; ma per non abusare della sofferenza dei soci accademici, io passo ad osservare che non può dubitarsi delle proprietà dinamiche che i corpi stessi mantengono anche ridotti allo stato d'imponderabili; giacchè se essi apportano le guarigioni, anche di malattie gravissime, è segno evidente che essi mantengono la stessa azione come quando sono sperimentati nello stato ponderabile. Ma è ben noto che non è necessario l'attrito onde si svolga elettricità dai corpi; ed è sufficente il solo contatto di due diverse sostanze per ottenerla, e così questo fatto milita per la seconda ipotesi. Ammettendo la quale, cioè un *quid* distinto che tutte le diverse sostanze compenetri, e che da esse si svolga coi noti mezzi di contatto, di chimiche composizioni, e di attrito, conviene ammettere ancora che in ciascuna di esse, l'etere acquisti proprietà diverse fisiche e dinamiche, relative alla diversa natura fisica e chimica per la quale ciascuna sostanza si distingue.

Ciò posto è egli esatto il considerare l'elettricità nei soli due stati di positiva e negativa, o non è più naturale il riconoscerla autonoma in ogni sostanza dalla quale essa può svolgersi? Debbono forse riconoscersi in essa delle proprietà generali, che fanno distinguere i due diversi stati dell'elettricità positivo cioè e negativo? ma che non escludono le indefinite modificazioni che essa può subire relativamente alla natura dei singoli corpi dai quali si svolge? La soluzione di un tale quesito spetta ai fisici ed ai fisiologi, purchè tengano conto dei risultati delle mediche dottrine di Hahnemann, le quali formano oggi una parte essenziale della medica scienza. Essendo che dalle dottrine e dalle scoperte di questo autore non solo sono risultate le

surriferite cognizioni intorno la divisibilità della materia, e della sua azione fisiologica ancorchè ridotta allo stato d'imponderabile; ma quello che per noi è più interessante si è che per le dottrine e per le scoperte di lui si sono già rinvenuti, e si vanno tutto giorno rinvenendo nuovi rimedi, desunti dalle sostanze che sembravano le più inutili, come anche da quelle più nocive, le quali, secondo la legge de'simili sono applicabili alle forme morbose siano pure le più stravaganti e pericolose. Di tal modo che i medici devono essere gratissimi ai naturalisti, i quali co'loro studii fisici, chimici, botanici fanno loro distinguere i diversi caratteri, e le diverse proprietà per le quali ciascuna sostanza dalle altre diversifica; ma quanto più interessanti non rendonsi queste distinzioni degli esseri allorchè esse non si limitano alla sola pompa scientifica; ma seguendo gli sperimenti di essi *in corpore sano* noi vi discopriamo sempre nuovi tesori terapeutici, come si vanno realmente discoprendo ogni giorno per opera dei seguaci di Hahnemann, specialmente nella Germania e nell'America.

Ma come sono possibili, rifletterà taluno, tante modificazioni anche nell'etere quante sono le sostanze diverse alle quali esso si congiunge? Rispondo a questa difficoltà col fare osservare che non è dissimile la causa e l'effetto, p. es. nelle umane fisonomie, le quali sono in ogni individuo modificate in modo da potersi ciascuno da tutti gli altri distinguere. Per chi non fosse soddisfacente questo argomento di analogia non mi resterebbe altro mezzo che ripetere le parole di Dante

« Come esser può Ei sa che sì governa. »

Essendo che a noi non è dato penetrare siffatti misteri de'quali il Sommo Artefice a sè solo ha riservato la scienza.

Ed ecco come fra le tante maravigliose scoperte che si sono fatte nel nostro secolo, specialmente per lo studio e per l'applicazione degli imponderabili, la medicina di Hahnemann che su questi si fonda, ci offre la più interessante, la più ammirabile, la più utile; e così si verifica ancora quanto faceva osservare il Makoppe ne'suoi aforismi intorno la pratica medica, ove si esprime così: « Ita hunc orbem divina providentia disposuit, ut quodlibet » seculum aliquo superbiat invento, ut beneficientissimam magni sui artificis » semper admiremur omnipotentiam ».

COMUNICAZIONI

Lanzi, D.r M. – *Presentazione di una sua nota* (1):

Il ch. Sig. Dott. Matteo Lanzi presentò all' Accademia una breve nota sulle Diatomee fossili del lago di Gabi. Questo, conosciuto pure col nome di lago di Castiglione, fu prosciugato dal Sig. De Antonis da circa cinquanta anni a fine di metterlo a coltura. Disse che nel fondo del suo bacino tuttora si ritrovano due strati diatomiferi. Il primo di color grigio nerastro, superiore, della spessezza di venti centimetri, rappresenta il fango del lago ancora fornito di materia carboniosa. L' altro a questo sottostante, di colore biancastro, di una potenza conosciuta di oltre a due metri, quale in alcuni punti potrebbe essere anche maggiore, contiene Diatomee in maggiore copia del precedente, miste a calcare finissimo, scevre da materia organica o carboniosa, le quali mostrano una ulteriore riduzione allo stato fossile. Vi abbondano le *Cyclotella*, vi stanno in quantità minore alcune *Navicula*, *Epithemia*, *Denticula*, *Mastogloia*, e poche spicule di Spongiari anch' essi di acqua dolce. Chiuse col dire che credè opportuno fare palese la determinazione delle specie ritrovate in questo materiale, finora non eseguita da altri; in quanto che può servire di guida nel dare una giusta interpretazione su ciò che avvenne in epoche più lontane ponendolo a riscontro con tale trasformazione di diatomee allo stato fossile, le quali con serie non interrotta continuarono la vita fino a noi.

Ferrari, P. G. S. – *Intorno alla correlazione fra i fenomeni straordinari del magnetismo terrestre e quelli della superficie solare*:

Il ch. P. G. S. Ferrari manifestò all' Accademia un suo sentimento di viva soddisfazione, vedendo a più riprese pubblicate in vari giornali scientifici e recentemente nei Resoconti dell' Accademia delle scienze di Parigi (Fasc. 1° Marzo 1886) alcune comunicazioni di illustri scienziati intorno alla correlazione strettissima che passa fra i fenomeni straordinari del magnetismo terrestre e quelli che si osservano sulla superficie solare, non solo quanto al generale andamento, ma perfino nei singoli casi particolari.

Anzichè reclamare per sè il vanto di priorità in cosiffatte ricerche da sè pel primo iniziate fino dal 1867 e proseguite negli anni seguenti, i risultati delle quali potevano forse sembrare arditi a prima vista; esso invece è lieto di vederli confermati dai più eminenti scienziati, come un Wild ed un Mascart, con osservazioni indipendenti e fatte in luoghi disparatis-

(1) Questa nota verrà inserita per esteso in un prossimo fascicolo.

simi, quali sono Pietroburgo e Parigi; dal che apparisce che oramai le primitive conclusioni da esso enunciate molti anni or sono, possono oggimai considerarsi quale un patrimonio incontestato della scienza astronomica e della fisica terrestre.

CIAMPI, P. F. – *Comunicazione di suoi studi sulla meteorologia* (1): Il ch. P. Felice Ciampi espose alcuni risultati di studi per lungo tempo da lui fatti, sulle relazioni scambievoli dei dati meteorologici in diversi punti della campagna compresa fra Roma, i monti tiburtini e i colli laziali, ed è solcata dal Tevere e dal Teverone.

Cominciando dai venti fece notare la differenza tra quelli che fan parte di movimenti assai estesi dell'atmosfera, e gli altri che sono originati sul luogo stesso. Questi ultimi consistono nei noti scambi di aria fra la terra e il mare, e sono sensibilissimi nelle nostre stazioni. Le brezze di terra lungo le pendici dei colli prendono le direzioni proprie dei varii canali pei quali discendono, e per il piano basso si dirigono di conserva al mare. Così è che mentre a Roma la brezza mattutina ci viene dal Nord, che è la direzione generale della corrente del Tevere, a Tivoli si ha costantemente da Sud-est, che è la direzione dell'ultimo tronco dell'Aniene prima di precipitare al fondo. Nei colli tusculani ancora essa viene più o meno da SE, secondo che è aperto il varco verso la valle stessa. La brezza di mare proveniente in media da Sud-ovest, si osserva dalle stazioni di Tivoli e del Tusculo rifare a ritroso la via percorsa dalla brezza di terra, e trasformarsi in venti di varia direzione secondo i varii canali per cui rimonta. È questo il vento che, finchè passa sulla valle più o meno riscaldata dall'insolazione, mantiene abbastanza sciolto il vapore di cui è carico e tutto al più favorisce la formazione di leggeri cumuli sulle ore del mezzodì, i quali poco dopo svaniscono: ma lo deposita allorchè investe le cime più fredde dei monti, e dà origine ai temporali quotidiani, che dal maggio all'Agosto si avverano nel pomeriggio sulle alture entro terra, mentre gli stessi scarseggiano sulla valle frapposta, e mancano quasi del tutto sulla spiaggia marittima.

Dagli stessi rombi poi si possono avere dei venti differentissimi per temperatura, per velocità, per condizioni barometriche, e sopra tutto per effetti fisiologici. Il SE dei colli, il più delle volte brezza gentile, che reca l'aria pura delle montagne, altre volte diviene *scirocco* procelloso, torbido, apportatore di sabbia sollevata perfino dai deserti africani, e d'un calore soffo-

(1) La memoria estesa verrà pubblicata in seguito.

cante. Il SW, per lo più zefiro soave e refrigerante ne' calori estivi, si trasforma in *libeccio* tempestoso, carico di esalazioni sollevate dalle acque sconvolte del mare, ed abbondante di elettricità. Il N. stesso di Roma si fa *tramontana* fredda ed impetuosa, allorchè in luogo di scendere dai vicini monti per recarsi al mare, fa parte della corrente che piomba dalle Alpi ad invadere la intera penisola. Tanto è ragionevole l'uso invalso fra noi di non nominare questi venti dal rombo onde spuntano, ma dalla lontana origine, che loro si attribuisce.

Di altri dati meteorici parlerà in altra seduta.

BONCOMPAGNI, D. B. – *Presentazioni diverse*:

Il ch. Sig. Principe D. B. Boncompagni presentò: 1° da parte del Sig. prof. G. Luvini un esemplare da lui indirizzato all' Accademia di una tiratura a parte intitolata: « *Sulla rifrazione atmosferica laterale, brano di lettera del Dottore G. Andries al professore G. Luvini*: 2° un esemplare del *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario diretto da Davide Besso*, A. I°, marzo-aprile 1886: 3° un esemplare del suo *Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, T. XVI, Indice: T. XVIII, maggio, giugno 1885. Presentò anche altri periodici a lui indirizzati per l'Accademia.

DE ROSSI, M. S. – *Presentazione di un suo opuscolo*:

Il Prof. M. S. de Rossi presentò un recente suo opuscolo estratto dal *Bullettino del Vulcanismo italiano*, Anno XI, contenente una raccolta di fatti, relazioni, bibliografie sul terremoto di Casamicciola del 28 luglio 1883, con brevi osservazioni.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

ORDINARI: Conte Ab. F. Castracane, *Presidente*. – P. G. S. Ferrari – Dott. M. Lanzi – Cav. P. Sabatucci – P. F. Ciampi – Ing. A. Statuti – Prof. M. Azzarelli – P. F. S. Provenzali – Prof. F. Ladelci – D. B. Boncompagni – Comm. C. Descemet.

CORRISPONDENTI: Prof. A. De Andreis.

AGGIUNTI: Principe D. F. del Drago – D. L. Boncompagni Ludovisi.

La seduta apertasi legalmente alle ore 3 $\frac{3}{4}$ p. venne chiusa alle ore 6 p.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXII, 1885—86, — Serie IV. — Rendiconti, Vol. II. — Fasc. 6, 8, Roma, 1886. In-4.°
2. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* — T. IV. — Serie VI. — disp. 3. — Venezia, 1885—86, in-8.°
3. *Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVI, indici. T. XVIII, Maggio e Giugno 1885. Roma, 1885, in-4.°
4. DE ROSSI (M. S.) — *Raccolta di fatti, relazioni, bibliografie sul terremoto di Casamicciola del 28 luglio 1883 con brevi osservazioni.* — Roma, 1884, in-8.°
5. *Jahrbüch über die Fortschritte der Mathematik, etc.,* — Jahr, 1881, 3. 1883. 1 Berlin. 1884—85, in-8.°
6. *Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas.* — Vol. IV. — Coimbra, 1883, in-8.°
7. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosettimo, — Serie XIII, Vol. I, — quad. 855, 856. Firenze, 1886, in-8.°
8. LUVINI (G.) — *Sulla rifrazione atmosferica laterale.* Firenze, 1885, in-8.°
9. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario.* A. I, fasc. II. — Roma, 1886, in-8°
10. *Polybiblion.* — *Revue bibliographique universelle.* — *Partie technique.* — Deuxième Série, T. XII. — Mars 1886. — Paris, 1886. In-8.°
11. —— *Parte littéraire.* — Deuxième Série — T. XXIII, Mars 1886. — Paris, 1886, in-8.°
12. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXIV, fasc. 11, 12. — Napoli, 1885, in-4.°
13. *Rivista di artiglieria e genio.* — Febbraio e Marzo 1886. — Roma, 1886, in-8.°
14. SEMMOLA (E.) — *Sulla variazione annuale della temperatura delle acque del golfo di Napoli.* Roma, 1884, in-4.°
15. —— *Sullo spegnimento della luce elettrica ad arco, ecc.* Napoli, 1885, in-4°
16. —— *Di una nuova esperienza sull'elettrolisi.* Napoli, 1883, in-4.°
17. —— *Intorno ad una nuova esperienza sull'elettrolisi.* Napoli, 1883, in-4.°
18. —— *La elettrolisi secondaria.* Napoli, 1885, in-8.°
19. —— *Intorno a' suoni eccitati in una lamina o in una corda dalle scariche elettriche laceranti.* Napoli, 1884, in-8.°
20. —— *Calore e Luce.* Napoli, 1879, in-8.°
21. *Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* — XL—LII, 1885. — Berlin, 1885, in-4.°
22. *Società meteorologica italiana.* — Bollettino decadico, A. XIV, n. 2—6.
23. —— Bollettino mensuale. Serie II, Vol. V, n. VI, VII, VIII, X, XII. Torino, 1885, in-4.°
24. *Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte.* — Jah. VII. — Heft I—IV. — Stuttgart, 1886, in-4.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE V[a] DEL 20 APRILE 1886
PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

DESCRIZIONE DI UN TROMOMETRO ECONOMICO
LETTERA
DEL P. GIOVANNI EGIDI, D. C. D. G.

AL SIG.[r] PROF. MICHELE STEF. CAV. DE ROSSI (1)

Pregmo Sig.[r] Cav.[re]

Segni 16 Gennaio 1886.

Nell'attuare l'idea di stabilire su questi monti Lepini un Osservatorio meteorologico, volli anche fornirlo di qualche istrumento per l'osservazione dei moti microsismici. E poichè Ella, se ben si rammenta, m'incoraggiò in tal divisamento, facendomi riflettere che questa sarebbe stata la prima e forse l'unica stazione su questi monti per lo studio dei fenomeni geodinamici, mi providi del *tromometro normale*, che Ella gentilmente mi procurò.

Dovendo nella scelta del locale per l' Osservatorio adattarmi alla distribuzione dell'edificio di questo seminario, non potei collocarlo al piano terreno e isolato, ma dovetti porlo dentro lo stesso osservatorio, che sta nella

(1) Questa lettera venne presentata all'Accademia dal Prof. M. S. de Rossi nella Sessione II[a] del 17 Gennaio 1886. Nel presentarla egli espresse i suoi sensi di gratitudine al Ch. P. Egidi per le cortesi parole a lui indirizzate nella lettera e prese a svolgere il tema generico delle attitudini e proprietà dell' intiera serie degli istrumenti sismici alla quale appartiene il nuovo inventato dal P. Egidi fornendo su ciò i dati che l'esperienza gli additava, per prevedere quali servigi potrà rendere l'istrumento novello e quali parti delle ricerche sismologiche dovranno secondo lui rimanere escluse dalle indicazioni di esso. Concluse che il nuovo istrumento dell'Egidi come già il Sismodinamografo del Galli introducono quasi un nuovo sistema nelle osservazioni dirette dei moti del suolo, lo che esige che dopo un tempo di esperienza e di studio comparativo se ne discutano i risultati. Ciò il de Rossi disse voler fare col più vivo interesse.

parte più alta dell'edificio, un 12 metri sopra il suolo sottoposto. Scelsi tuttavia un muro interno di circa un metro di spessezza collegato nei piani inferiori agli altri muri per mezzo di volte reali.

Per le relazioni che Le ho date altre volte, Ella sa come tale istrumento mi restò sempre affatto immobile, eccetto il caso di certi uragani di vento, che qui su sono d'incredibile violenza, sicchè le ordinarie custodie non bastano a ripararne gli istrumenti. Nè per mancanza di spazio potei eseguire il suo consiglio di dare una maggiore lunghezza al filo, che sostiene il corpo pendolare.

In tali circostanze, peggiorate dalla qualità della formazione di questi monti, che sono composti di strati calcarei alternati da strati cretacei, e pei quali più difficilmente si propagano le scosse sismiche, pensai se fosse possibile trovare altro metodo. Io cercava un tromometrò di facile costruzione, di poca spesa, di molta sensibilità, e che fosse atto a dare buone indicazioni. Senza dilungarmi nei varii tentativi fatti, Le esporrò brevemente in primo luogo le norme che mi guidarono, in secondo luogo la descrizione dell'istrumento, dal quale finora, cioè per sei mesi, ho ottenuto risultati soddisfacenti, poichè generalmente credo che concordino con quegli di altri buoni osservatorii.

I. Credo in primo luogo che debbano distinguersi i tremiti che si comunicano agli istrumenti dal suolo o dai muri, i quali tremiti sono originati da cause esogene, e i colpi o urti, che generalmente parlando provengono da cause endogene. Quei primi si propagano e si comunicano sotto forma di *vibrazioni*, che possono rassomigliarsi, secondo che avverte il Chmo P. Bertelli, alle onde sonore che fanno vibrare i solidi. Questi secondi per contrario, pare a me, che rassomiglino alla propagazione e comunicazione di un colpo, che si dà alla prima di una serie di palle elastiche, che fa balzare l'ultima.

Da ciò segue, che sarà ottimo quell' apparato, che smorzando subito quelle prime piccole vibrazioni, noti solamente gli urti o colpi. Tale, a mio parere, è certamente il sismodinamografo del Chmo Prof. D. Ignazio Galli.

Ma l' istrumento del Galli non si sarebbe potuto fabbricare qui, nè si sarebbe potuto avere a piccolo prezzo, nè il posto medesimo, che come ho detto è così poco sensibile alle scosse sismiche, sarebbe adatto a studii fatti con istrumento così perfetto; non ci sarebbe il pregio dell'opera. Pur tuttavia desiderava, che il tromometro da farsi partecipasse quanto fosse possibile di tale vantaggio, cioè di separare le vibrazioni dalle scosse, il che non fanno i tromometri ordinarii.

Ora nelle varie pruove tentate, io aveva osservato

1.° Che la discontinuità nelle parti dell' istrumento (come p. e. quando una punta sostiene appoggiandosi ad un fulcro un pezzo che può oscillare), nuoce molto alla sensibilità dell' istrumento.

2.° Che nelle aste di figura presso a poco cilindrica vi è grande facilità di vibrare, ma molta difficoltà di oscillare, se pure non sieno aiutate a questo con un peso, come è nell'apparato del P. Cecchi. Tuttavia la parte dell'asta che rimane libera, quanto è più lunga tanto vibra più facilmente, e più facilmente le vibrazioni comunicandosi al peso si trasformano in oscillazioni.

3.° Che nelle lunghe lamine sottili, come sono p. e. le molle di orologi a sveglia, vi è grande facilità di oscillare; ma in esse ogni più leggera vibrazione determina le oscillazioni, e se loro si aggiunga qualche peso, anche relativamente non grande, come un indice un po' lungo, divengono quasi inerti ad oscillare.

Tali considerazioni e le prove fatte mi necessitavano dunque ad escludere i pendoli, gli apparati discontinui, le aste tendenti alla figura cilindrica e gravate di un sol peso, e le lunghe lamine sottili.

Pensai pertanto che se un'asta di acciaio, immobilmente avvitata ad una spranga di ferro fissa nel muro, fosse fornita di due pesi, uno posto all'estremità libera dell'asta, l'altro in un punto intermedio scelto convenientemente, sarebbe divisa in due parti. E se le due parti fossero tali da non potere concepire vibrazioni sincrone, i moti vibratorii comunicati all' asta si estinguerebbero subito, senza sommarsi e senza trasformarsi in oscillazioni; mentre l'asta avrebbe la facilità di oscillare.

Di più mi parve che tale facilità di oscillare si sarebbe aumentata se si desse all' asta la figura di lamina, ma non troppo sottile in paragone della sua lunghezza, e con ciò si otterrebbe il vantaggio che eseguendosi le oscillazioni sempre nello stesso piano, potrebbe restare immobile il canocchialetto destinato ad osservarle.

Finalmente è manifesto che se il peso intermedio non è distribuito ugualmente intorno alla sezione trasversale dell'asta, ma posto al di quà e al di là della medesima nel piano, in cui l'asta può oscillare, ciò renderà più facili le oscillazioni, utilizzando tutto il peso a tale scopo. Così nella figura, (V. fig. 1.ª) *ab* è la sezione trasversale dell'asta, *c* e *c'* sono due

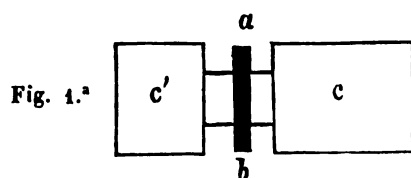



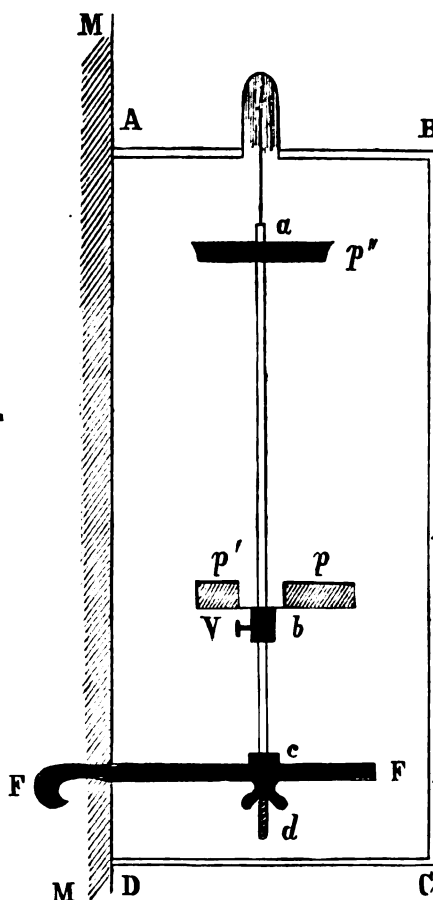
Fig. 1.ª

cassettine da empirsi di palle di piombo per aumentare o diminuire il peso a piacere, finchè sperimentalmente si conosca la quantità più utile per tale asta di tale grossezza e di tale elasticità determinata; e ciò non può meglio e più facilmente stabilirsi che colla esperienza in ciascun caso particolare.

Le oscillazioni debbono essere determinate dalla comunicazione di un urto in qualunque direzione, ora se il centro di gravità del peso posto in c e c' cadesse dentro l'asta *ab* i moti sussultorii, meglio gli urti verticali non produrrebbero oscillazioni; perciò bisogna che il peso sia eccentrico ed a tal fine una delle due cassettine è più grande e vi si pone una maggiore quantità di piombo. In tal modo i soli urti nella direzione *ab* saranno quelli dei quali l'effetto sull' asta sarà minimo.

II. Ora non offre più alcuna difficoltà la descrizione del tromometro, e della sua costruzione.

Ho presa un'asta di buon acciaio, lunga 50 centimetri, e lasciandola cilindrica ai due capi, l'ho fatta spianare a martello per 45 cent. di lunghezza. (V. fig. 2ª) Ne è venuta fuori una lamina di un centim. di larghezza e

Fig. 2.ª

uno in due millimetri di spessore; i due capi sono lavorati a maschio di vite, e al di sopra di uno di questi è saldato un collare di ferro *c*.

Nel muro MM è fissata profondamente (circa 60 centim.) un'asta spianata di ferro FF, sulla estremità esteriore della quale è avvitato uno dei capi dell'asta *acd*. All'altro capo *a* è fermato a vite un filo di ferro *ai* lungo un 25 cent. circa, la cui punta acuminata *i* fa da indice e si osserva col microscopio.

All'estremità superiore dell'asta *a* v'è un recipiente fatto a barchetta, per regolarne il carico p''; il peso intermedio p e p'' posto nelle due cassettine, delle quali ho detto sopra, si registra quanto alla posizione e si ferma all'asta per mezzo di una vite di pressione V.

Nella figura si vede la costa dell'asta la quale volge il suo lato spianato al muro.

Una cassettina di legno ABCD, aderente al muro difende l'apparato da impulsi esterni; l'indice *i* si guarda a traverso di un tubetto di cristallo, come nel tromometro normale.

Ecco in che consiste questo tromometro. Soggiungo ora alcune brevi osservazioni a maggiore schiarimento.

Quanto all'indice *ai* basta che il peso del filo di ferro adoperato sia trascurabile, e come un'appendice rigida, affinchè nè vibri da se, nè comunichi le vibrazioni sue all'asta.

Quanto alla lunghezza delle due parti *ab* e *bc*, essendo *a*, *b* e *c* tre nodi nelle vibrazioni che si comunicassero all'asta, bisogna determinarle, come sopra ho detto, sperimentalmente: in genere può dirsi che la lunghezza *ab* sarà molto maggiore dell'altra *bc*: così nel mio mi trovo soddisfatto avendo preso *ab* uguale a 35 centim., e *bc* uguale a 10 centim.

Parimenti in quanto ai pesi $p + p'$ e p'' può dirsi solo che $p + p'$ sarà maggiore di p'', così nel mio trovo buona sensibilità con $p + p'$ uguale a poco più di un chilogr., e con p'' uguale a poco meno di 400 grammi: sarebbero i due pesi in ragione inversa della distanza dal fulcro FF.

Finalmente osservo che quantunque uno solo di tali strumenti generalmente basti, tuttavia sarà meglio averne due, i quali possano eseguire le loro oscillazioni in due piani tra se perpendicolari, e sieno quindi fissati a due muri perpendicolari tra loro, poichè molto più facilmente un colpo o scossa si trasformerà in oscillazione dell'asta, se anche il ferro FF si consideri come parte dell'istrumento, la quale può solo oscillare, benchè di una quantità infinitesima, nel piano della figura, e così aiutare l'impulso che solamente può prendere l'asta di oscillazione nello stesso piano.

III. La commodità che mi sembra offrire questo tromometro, è che oltre ad occupare poco spazio, ed essere di pochissimo costo, può essere fabbricato facilmente da un qualunque ferraio di qualsiasi paesello, senza bisogno di ricorrere ad eccellenti meccanici; e così qualunque osservatorio anche privato e posto lontano da grandi città può facilmente fornirsene.

La squisita sensibilità di tale strumento agli urti, mi sembra resa evidente dal fatto, che qui tale strumento si muove, dove il tromometro normale è immobile, e le sue indicazioni concordano con quelle degli altri osservatorii, come Ella ha potuto giudicare dai risultati, che Le ho trasmessi alla fine di ogni mese.

Che poi non siano le sue oscillazioni influenzate da cause estrinseche e principalmente dai venti furiosi lo mostra il fatto, che di frequente si ripete, cioè che in giorni di vento furioso anche durante molte ore si conservi l'istrumento quasi immobile, e invece dia segni di straordinaria commozione non di rado in giornate assai calme. Ed oltrechè la costruzione istessa, siccome prima ho mostrato, esclude il sommarsi o il durare delle vibrazioni, che vengano a comunicarsi all' asta, la pratica viene a confermare la teoria: poichè non di rado nel momento dell'osservazione può rilevarsi, che mentre l'indice era fermo al passare una camerata di giovani per le scale vicine si vede un tremolio vibratorio che cessa quasi istantaneamente appena cominciato, e rimane poi l'istrumento in quiete come stava dianzi. Perciò mi pare che non si possano attribuire le oscillazioni osservate a comunicazione di altri simili moti che possano avvenire nelle altre parti più lontane del medesimo fabbricato. Altre cause estrinseche qui non vi sono: stiamo lontani un tre chilometri dalla ferrovia che passa nel piano sottoposto; nè carri o carrozze si accostano agli strati di questa cima, ma tengono la via sulla costa del monte vicino, gli strati del quale hanno un'altra direzione e sono affatto separati dal nostro terreno, e le vetture si debbono fermare a più di mezzo chilometro distanti di qui. Il suono delle campane, che faceva vibrare con gran forza un' asta cilindrica di un apparato simile a quello del Chmo P. Cecchi, non produce alcun movimento; neppure ho osservato che influisse sensibilmente lo sparo ripetuto dei mortari nelle occasioni di alcune solennità.

Da tutto ciò mi pare poter conchiudere che questo tromometro corrisponde abbastanza ai desiderii che aveva formati, e che, come gentilmente ne ha giudicato il Chmo P. Bertelli, se ne possono sperare buoni risultati.

Credo di avere con questa relazione soddisfatto pienamente al desiderio

che Ella avevami mostrato, e perciò chiedendole scusa se questa mia lettera è stata troppo prolissa, sono con tutta la stima

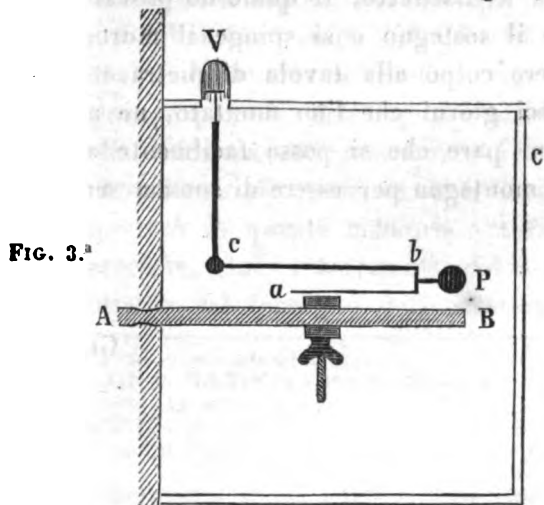
Suo Devmo
P. Giov. Egidi S. J.

APPENDICE

ALLA LETTERA SULL'ASTA SISMOSCOPICA.

Insistendo sempre sull'idea di osservare direttamente quanto si può le trasmissioni degli urti, a preferenza delle ondulazioni nelle quali si trasformino, ho imaginato di adattare un dischetto metallico sopra una punta, la quale anche per un semplicissimo urto debba scagliare via il dischetto.

A questo fine ho scelto un muro sperimentato debolissimo e soggetto a risentire ogni moto anche accidentalissimo. Fissata al muro per la profondità di 30 centim.[1] e murata una tavola AB (V. fig. 3a) di pietra di 3 in 4

Fig. 3.a

centimetri di spessore, vi ho avvitata sopra una asta di acciaio *abc* spianata come quella dell'asta sismoscopica, e ripiegata ad angoli recisi; l'asta ha due parti lunghe disugualmente affinchè la vibrazione concepita per un colpo sia istantanea, e tra queste due parti, porta un peso P,

che credo gioverà ad accrescere la resistenza dell'asta ad altri movimenti, e ad accrescere l'effetto di un colpo trasmesso al sostegno. L'estremità *c* libera porta un'asticella di abete leggerissima che termina con una punta di ago, nella quale posa un dischetto o cappelletto leggerissimo di foglia metallica. Tutto l'apparato è difeso da una cassa CC di legno , e la punta col dischetto sono coperti da una campana V di vetro.

Prima di porre il dischetto ho osservato per un mese la punta d'ago col microscopio in diversissime circostanze, anche di vento furioso, di piccole vibrazioni comunicate al muro, di suono di campane vicine, anche di una campanella abbastanza grossa, che serve per dare i segni al seminario ed è fermata nel muro vicino e nel piano immediatamente inferiore, etc.

Ora non ho mai osservato il più piccolo movimento nell'ago, eccetto una volta che a un quindici metri di distanza si sparavano alcuni mortari in occasione di una festa , e ad ogni colpo corrispondeva una velocissima e brevissima (potrei dire quasi istantanea) vibrazione. E noti bene ciò che ho detto da principio, che ho sperimentato con aste fissate a questo muro, che è soggettissimo a risentire ogni comunicazione di moto pel vento, pel suono delle campane, per camminare di persone nei corridoi vicini, etc.

Rassicuratomi adunque che tal sistema , il quale nel principio coincide col sismodinamografo del Galli, era al sicuro dall' influsso di altre cause, vi ho collocato sopra il dischetto, il quale ho provato che non viene gettato via se si preme il sostegno o si spinge il muro, ma subito si fa cadere dando un leggero colpo alla tavola di pietra.

Sono ora circa dieci giorni che l'ho montato, nè ancora è caduto mai.

Questo apparato mi pare che si possa facilmente adottare in qualunque osservatorio anche di montagna per essere di somma semplicità ed economia.

Suo Devmo
GIOV. EGIDI S. J.

ANALISI DEI PRINCIPALI TERREMOTI AVVENUTI DAL LUGLIO 1880 AL GIUGNO 1881 (1)

MEMORIA

DEL CAV. PROF. MICHELE STEFANO DE ROSSI

La moltiplicità dei fenomeni sismici singolarmente interessanti avvenuti nell'estate ed autunno 1880 non che nel principio del 1881, avevano fatto divenire insufficienti le pagine del mio Bullettino del Vulcanismo italiano a pubblicarne prontamente le notizie ragionate e le analisi. In pari tempo queste formano un insieme tanto ricco di dati per il rapido progresso dei nuovi studi di sismologia e di dinamica terrestre, che mi sembrano assai acconcie ad essere riunite in un solo gruppo nel quale ricevono reciprocamente molta luce per accertarne i dati sismologici. Quindi ho divisato continuare ciò che feci già altra volta in questi nostri atti massime per i terremoti del 1874, il dare in luce cioè tutte le notizie e le analisi raccolte sopra i fenomeni maggiori avvenuti nel periodo suddetto, dei quali fenomeni non potei dare ampie descrizioni nel sopracitato mio Bullettino.

Questa serie di documenti, notizie ed analisi comincia solo nella seconda metà del 1880 perchè i principali terremoti della prima metà dell'anno, furono quasi del tutto abbastanza esposti nei corrispondenti fascicoli del citato Bullettino. Anche di alcuni avvenuti nel principio della seconda metà di quell'anno ho ragionato abbastanza in quella stessa pubblicazione. Anzi per taluni pubblicai pure in piccole carte topografiche d'Italia, per ciascun giorno, l'andamento della burrasca endogena quale si manifestava nelle varie parti della penisola sotto forma di scosse, di moti microsismici e di conati eruttivi (2). Perciò ometterò in questa memoria i terremoti dei quali ho già dato le notizie raccolte, cioè i terremoti del 4 e 25 luglio e del 9 agosto e comincerò soltanto dal fornire i dati accertati per gli altri suc-

(1) Questa memoria fu da me annunciata ed in parte presentata nella sessione dell'anno XXXIV cioè 19 decembre 1880. (V. Atti v. XXXIV, p. 40), promettendo di unirvi l'*Esame dei periodi sismici italiani dal* 1878 *al* 1880. In fatti nella sessione VII di quel medesimo anno (12 Giugno 1881) presentai i *Quadri statistici e grafici dei fenomeni endogeni italiani dal* 1877 *al* 1880 (V. Atti l. c. p. 482). Ma poichè per il ritardo nella stampa degli atti quasi in pari tempo pubblicavasi il 2.° Vol. della mia Opera intitolata *Meteorologia endogena* nella quale veniva fatto quell'*Esame dei quadri statistici dal* 1873 *al* 1880, risolvetti di riprenderne discussione in questi nostri Atti unitamente ad altri anni successivi, preferendo riunirne parecchi. Intanto però non essendo conveniente ritardare di più la pubblicazione dei numerosi documenti relativi ai singoli terremoti maggiori, metto in luce la raccolta promessa ed annunciata, dal Luglio 1880 al Giugno 1881, riservandomi di pubblicare quanto prima gli studi ed i documenti inediti relativi al tempo successivo.

(2) Bull. del Vulc. Ital. Anno VII, 1880, pag. 136 e seguenti.

cessivi fino al giugno 1881. Farò eccezione pel solo terremoto dell'8 luglio, del quale non avendo dato verun ragguaglio, occorre non rimanga dimenticato.

Anzi faccio osservare che nel quadro grafico del 1880 potrà il lettore vedere il posto che nelle curve dei fenomeni prendono i terremoti che ora analizzeremo (1). Ma dal gennaio al giugno 1881 mancherà questo confronto.

Chi bramasse aver prontamente cognizione dell'andamento generale dell'attività endogena in questo semestre del 1881, prima che sieno date alla luce le curve di quell'anno, potrà consultare le riviste sismiche mensili da me pubblicate nel Bullettino del Vulcanismo italiano (2). Oltre a ciò per fornire un'idea dell'andamento generale dei terremoti propriamente detti, ho aggiunto un quadro riassuntivo delle date mensili di massimo sismico. Lo specchio di queste, poichè giunge fino al giugno 1881, avrò la cura nell'analisi dei principali terremoti di questo semestre di comprendere tutte le date che figurano nel citato riassunto anche se si tratti di scosse che non meritino il nome di principali.

*Terremoto di Brisighella dell'*8 *luglio* 1880.

(Comunicazione del C. A. Malvasia)

« Il terremoto ha cominciato a farsi sentire giovedì 8 corrente luglio 1880 alle ore $8\frac{1}{2}$ ant. in Brisighella con forte scossa sussultoria, e continua (poco più o meno forte secondo le notizie avute fino a ieri 11) cinque o sei volte al dì ed altrettanto la notte. È per lo più sussultorio, il che pel passato non si è quasi mai verificato, ma sempre accompagnato da rombo che incute timore. La valle del Morgeno (comune di Modigliana) a pochi kilometri da Brisighella; la valle del Lamone (comune di Brisighella), Marradi, Faenza; la valle Sintria (comune di Brisighella) e Riolo; la valle Santerno comune di Tossignano etc., che hanno gli stessi elementi di gesso, zolfo, calce ed acque minerali solforose, ferrugginose si risentono chi più chi meno di queste scosse. Per la qualità del moto sussultorio le popolazioni sono piuttosto allarmate ma per ora nessuna disgrazia. Il cielo è nebbioso, plumbeo, ed un calore eccessivo dà un vivere incomodo. Si spera in una pioggia benefica che calmi questo stato eccitato dell'atmosfera. »

Dalle cose narrate nella surriferita relazione apparisce che le scosse si diramarono da un comune centro o focolare sottoposto alla cresta Appennina d'onde hanno origine quelle vallate fra loro limitrofe.

---

(1) (v. Atti della P. Acc. de' N. Lincei Anno XXXIV, tav. VI, VII, pag. 482. Bull. del Vulc. Ital. Anno VIII pag. 101. *Meteorologia endogena*, vol. II, pag. 330.

(2) Bull. del Vulc. It. Anno VIII, 1881, pag. 48—55, 107—112.

Terremoti ed eruzioni del 4 Settembre 1880.

Il Direttore dell'Oss. meteorologico di *Marola* sull'Appennino dell'Emilia Prof. Capanni scrissemi che alle 12,50 p. avvenne una forte scossa prima sussultoria poscia ondulatoria NO–SE durando 6''. Taluno a mala pena si resse in piedi: una campana di 10 Kil. oscillante in piano normale al suddetto suonò più colpi. Tutte le parti dell'Emilia ebbero in pari tempo la scossa che fu più forte sull'alto Appennino. Tempo bello; barometro relativamente alto; vento NE.

Altre notizie di Marola danno la parte ondulatoria del fenomeno come avvertita fra NE–SO cioè secondo il piano d'oscillazione della campana riferita dal Capanni.

In Modena il Ragona notò nel R. Oss. l'orologio fermato dalla scossa alle 12,56 pom. Si avvertirono due urti successivi sensibilissimi fra NNO e SSE durati 3'' circa.

In Reggio dai giornali apparisce che la scossa verso l'una pom. fu leggera ma che parve varia da luogo a luogo del circondario essendo stata al certo più rilevante alla collina.

A Bologna la scossa fu lievissima e notata appena dal sismografo della R. Università, non nel gabinetto tromosismico del Malvasia.

Basta dare un' occhiata alla orografia appennina della regione scossa in confronto con le poche riferite notizie, per vedere come l' intensità maggiore e la qualità sussultoria della scossa non che l'ora più bassa in Marola indichino l'origine della medesima nelle creste dell'Appennino d'Emilia. Le direzioni delle onde NO–SE e SO–NE in Marola stessa e poscia in Modena SSE–NNO indicano abbastanza che le onde sismiche erano subordinate e modificate secondo gli assi delle fratture–valli della regione.

In quel medesimo giorno alle 4 ant. un terremoto accadeva a Vinadio ed Argentera nella cresta cioè dalle Alpi in valle della Stura. Alle 8,11 ed 8,18 pom. poi altre scosse si avvertivano a Monte Cassino.

Dal Vesuvio poi il Palmieri annunziava: « Continua la fase di leggiero incremento, cominciata nel 4 di questo mese, ed il sismografo dell'Osservatorio conserva anch'esso il piccolo aumento di energia manifestatasi fin dal giorno 3. Le piccole lave che si versano sul lato del cono, dalla parte di NE, sono quasi sempre discontinue e quindi non fanno lungo cammino. A quando a quando si avvertono leggiere commozioni del suolo in luoghi più o meno lontani, l'ultima delle quali si è fatta sentire negli Abruzzi.

Questo lento e lungo periodo eruttivo non finirà prima di manifestare fasi di maggiore attività, le quali non è possibile prevedere fin da ora. »

Leggiamo poi nei giornali di Napoli dell'11 Settembre: « Dal dì 4 del corrente il Vesuvio ha mostrato una maggiore attività; i suoi proiettili sono stati più numerosi e slanciati a maggior altezza.

L'altra notte un curioso, essendosi troppo approssimato al cratere, atterrito da' proiettili infocati, ha cercato di fuggire, e cadendo sulle scorie si è ferito piuttosto gravemente, ed è stato trasportato in sedia dalle guide, »

Questa attività durò notevole ancora per qualche tempo tanto che ai 6 del successivo ottobre il Palmieri nuovamente comunicava ai giornali ulteriori notizie.

I terremoti di Vinadio ed Argentera accennano evidentemente un altro punto delle creste a valle dei nostri monti agitate dalle azioni endogene del 4 settembre. Anche il terremoto di Cassino accenna facilmente alla stessa cosa nelle creste meridionali dell'Appennino. Non può esser fortuita la quasi contemporaneità dei tre punti d'agitazione e la coincidenza loro col risveglio del Vesuvio. Perciò nei fatti di questo giorno, dei quali forse conosciamo appena la minima parte, sembrami di vedere una delle luminose conferme della correlazione ed unità delle azioni endogene dell'intiera nostra penisola.

Ecco poi le sopracitate altre notizie del 6 date dal Palmieri.

« L'eruzione del Vesuvio è in un periodo di maggiore attività, le lave abbondanti si versano sui fianchi della montagna, dalla parte di nord. »

» Un fenomeno, non nuovo certo, ma che ora è più intenso, è il gran numero di fumarole aperte intorno intorno al cratere, qualcuna a cento metri dal centro d'eruzione. »

» È appunto l'esame di coteste fumarole che può portare un progresso qualunque nello studio dei vulcani. »

Il Vesuvio ai 4 e 20 Novembre 1880.

Quantunque noi qui ci occupiamo dei principali terremoti, pure siamo costretti dalla materia a recarvi il confronto delle fasi Vesuviane. Perciò aggiungeremo alle cose già dette sul Vesuvio che questo vulcano il 4 Novembre a sera fece scrivere di sè ai giornali che più del solito sembrava attivo. Forte era il riverbero di fumo rosso della lava snl fianco verso il Somma e la lava era più fluida ed incandescente raggiungendo anche la base del cono.

Dopo di ciò i medesimi giornali dovettero di nuovo occuparsi del Vesuvio per fenomeni che esso presentò il 20 e 21. Scrive il *Corriere del Mattino* di Napoli del 21, « ieri sera (20) una nuova lava stretta, ma fluente e rapida, si mostrò dal nostro versante. L'agglomeramento di lava raffreddata o semispenta sulla bocca del vulcano ha fatto sì che la lava si sia

versata da un lato quasi opposto a quello da cui s'era versata negli ultimi giorni di eruzione. »

« Questa nuova lava che sembrava iersera da Napoli un rigagnolo, o un grosso serpente di fuoco, ha lambito la diga di scorie che difende la stazione superiore della funicolare.

» Intanto, questa mane, alle ore otto, la lava continuava a scendere abbastanza rapidamente ed era parallela al piano inclinato della funicolare.

» Grossi proiettili infocati erano spinti a grande altezza e molti son caduti alla base del cono. »

Aggiungevano poi gli stessi giornali ai 22:

« La lava che ieri l'altro minacciava la Funicolare, si è contentata di occupar solo una parte del viottolo che dalla stazione superiore mena all'orlo del cratere. Essa per ora si è arrestata, ed il piano inclinato è interamente libero pel transito delle due vetture, che si chiamano il *Vesuvio* e l'*Etna*.

» Gli apparecchi sismici dell'Osservatorio non accennano a prossimo notevole incremento dell'attività eruttiva. »

Intorno a questi moti del Vesuvio noterò soltanto ciò che già ho fatto osservare nelle riviste sismiche di questo tempo pubblicate nel Bullettino del Vulcanismo Italiano ed in quello dell'Associazione Meteorologica.

Le date preferite per i massimi tanto sismici che vesuviani tornano sempre approssimativamente e spesso esattamente al quarto ed al nono giorno di ciascuna decade del mese. I fatti ora riferiti, gli antecedenti e quelli che seguono ce ne danno una luminosa conferma.

Terremoto di Agram del 9 *Novembre* 1880.

Non credo dovermi dilungare in particolareggiata analisi di questo terremoto che fu subito studiato ed analizzato da parecchi dotti geologi e naturalisti più di me vicini al teatro del triste fenomeno. Non potendo però in questo lavoro mancare il ricordo di un fatto sismico tanto grandioso e possedendo noi alcuni dati massime italiani che rimasero ignoti agli autori che si occuparono del fenomeno, noi ci limiteremo a riprodurre due delle migliori descrizioni dei fatti forniteci dai giornali, alle quali aggiungeremo un' importante lettera del Sig. Giulio Grablovitz e poscia faremo seguire i nostri dati italiani sul medesimo avvenimento.

I

Zagabria 18 Novembre 1880.

Erano le otto ore antimeridiane del 9, il cielo s'era rabbuiato e un forte

scirocco portava sulle sue gravi ali un' acqueruggiola finissima, gli uomini si recavano al lavoro, le buone massaie a far provvista per i bisogni della giornata, i devoti si avviavano alla chiesa per assistere all'incruento sacrificio. Ad un tratto il suolo dà un sobalzo, poi trema e finisce per ondeggiare come se volesse fuggire di sotto ai piedi della gente. S' innalza un nembo di polvere che involge nelle sue torbide spire l'intera città. I bronzi suonano ad intervalli, a rintocchi, irregolarmente; s'ode uno scricchiolar di travi, un gemere di assi e d' imposte, un precipitare di pietre, di tetti e muri, e fumaiuoli, un infrangersi di vetri e di cristalli, e poi tutto si tranquilla ed al rumore di poc'anzi succede il silenzio della morte. Dileguatosi il fumo e la polvere, lo sbigottimento si convertì in profonda e generale disperazione.

Le vie echeggiarono di grida e pianti; le madri cercavano i loro bambini, fanciulle e giovanette coi capelli disciolti mezzovestite cercavano nascondersi dietro al rottame ed alle macerie, vergognose e meravigliate che la paura avesse potuto più del pudore; la città poi presentava un aspetto veramente desolante.

La scossa non durò che dieci minuti, ma bastarono questi per rovinare interamente cinquecento case e ridurre in uno stato miserevole tutte le altre. I campanili delle chiese di san Marco e di santa Maria hanno crepature da cima a fondo. Bisognerebbe demolirli, ma come fare, come avvicinarsi a quelle moli immani che minacciano rovinare a terra al minimo soffio di vento?

Il camino del gazogeno girò nella sua parte intorno al suo asse, non cadde ancora, ma si sostiene, non si sa come, contorto come il refe che si voglia passare per la sottil cruna di un ago. Il Duomo è una rovina. Dapprima precipitò al suolo l' altar maggiore, poi il presbitero. Infine si sfasciò anche la volta per le fessure della quale traspare un fil di cielo. Il governatore dorme in una carrozza ferroviaria, dacchè il suo palazzo non è più se non un mucchio di rovine. Il palazzo arcivescovile, l'Università, la fabbrica tabacchi, il palazzo del comando generale possono sfasciarsi di ora in ora.

Gli allievi della scuola militare dovettero riparare a Karlstadt; ma io non finirei se volessi seguitare in questo modo, e basterà dirvi, che la povera città, poco anzi ancora sì florida e industriosa, non può ricoverare entro le sue mura che la metà dei cittadini, mentre gli altri, o si rifugiarono altrove, o debbono adattarsi a dormir sotto tettoie ed anche a ciel sereno.

Poco lungi dalla città, sul lembo d'una folta selva di castagni, s'aprì un crepaccio largo un metro e lungo mezzo miglio. S'aprì eruttando fango ed acqua calda e spargendo intorno intorno un fortissimo odor di zolfo.

Un geologo mandato dal Governo a studiare il fenomeno, trovò su ambi gli orli della crepatura innumerevoli vulcani di fango, e intorno ad essi, fino a 10 metri di distanza, una sabbia finissima e rossiccia che, strofinata fra le dita, dava un lieve odor di zolfo.

L'orologio della cattedrale fermo, mostra l'ora fatale della sciagura (7,34). Seimila persone assistevano domenica alla pubblica Messa, celebrata da Monsignor Vescovo a cielo scoperto. Lo spettacolo era imponente. Si vedevano frammiste ricche vesti ricamate di preti, variopinte uniformi di ufficiali di tutte le armi, uomini, donne, fanciulli, monache e la gente del contado nel suo costume nazionale. Riguardo al trasporto del campanile della chiesa dei Francescani, tutti gli ingegneri sono d'accordo che prima bisogna cerchiarlo. La sua caduta porterebbe seco quella delle case circostanti, già malconce dal terremoto. Un quarto della popolazione è fuggito. Il Comitato di soccorso ha incominciato le sue sedute. L'Università riman chiusa fino all'anno nuovo.

La terra vibra ed oscilla ancora. Il danno per ora è di 5 milioni di fiorini.

II.

Ciò che sotto il rapporto scientifico, dà un carattere speciale al fenomeno si è che quelle regioni appartenendo a terreni alluvionali furono ben di rado funestate da terremoti.

Si comprende che sulla costa illirica, e nell'altipiano di Adelsberg ad oriente di Trieste si riscontrino i caratteri delle regioni vulcaniche dove i terremoti hanno la loro ragion d'essere, ma è strano che invece la catastrofe abbia scelto un terreno dove questi caratteri mancano affatto. Degno altresì di rimarco è che la scossa si sia diretta da Laibach, per Agram e Serajevo, in una direzione parallela al corso della Sava e facendo centro di sua azione appunto Agram, a metà quasi dello stesso fiume.

I cultori delle scienze telluriche avranno campo certamente di studiare e di formulare nuovi dati sulle teorie che regolano questi fenomeni; intanto noi crediamo interessante pel lettore raccogliere le ultime notizie che ci arrivano sull'intensità e sulle conseguenze del disastro.

Ad Agram la prima scossa s'è sentita alle 7,24 ant.; fu la più forte e

durò 10 secondi; seguirono poi due altre scosse alle 7,30 ed alle 8,28 di intensità sempre decrescente.

La prima scossa ebbe moto prima circolare, poi ondulatorio da Nord-Est verso Sud-Ovest. L'intera città fu tosto ravvolta in una fitta nube di polvere sollevata dallo stesso tremito della terra e dalle macerie cadenti dalle case. Lo spavento dai cittadini fu indescrivibile e dopo la seconda scossa le strade furono invase da una folla di fuggenti in tutte le direzioni. Ben pochi conservarono calma e poterono mettere un pò d'ordine in quella confusione che avrebbe potuto causare altre serie conseguenze. Ad onta di questo una buona parte della popolazione ha abbandonata la città ed accampa all'aperto.

Non v'è chiesa od edifizio pubblico che non presenti le traccie del disastro. La cattedrale e la stupenda basilica di S. Giorgio sono le più rovinate; il palazzo di residenza dell'arcivescovo, due caseggiati per le scuole, e le caserme sono in parte cadute, in parte lesionate seriamente. Delle case e dei palazzi particolari, molti minacciano rovina e furono fatti sgombrare. Dei camini una buona metà è caduta ed è ad essi che si deve la maggior parte delle vittime.

Finora si contano 5 morti, 12 feriti gravemente ed una trentina di feriti leggermente. Le cure più efficaci e pronte sono state prestate dalle autorità, sia ai feriti, come a quelli che dovettero sloggiare dalle case. Il conte Pejacsevic, governatore di Croazia percorse subito la città invitando i cittadini alla calma ed incoraggiando i più timorosi.

Fuori di Agram, i paeselli, le ville, i casolari sono stati pure più o meno danneggiati; due ponti sulla Sava hanno manifestate delle lesioni, le linee ferroviarie e telegrafiche sono intercettate.

In Agram nelle case tutto ciò che non era infisso fu balzato a terra e frantumato; due persone furono gettate dalla finestra in strada. La *Gazzetta di Zagabria* fa un lungo elenco di chiese ed edifici pubblici danneggiati o minaccianti rovina; di muri isolati ne sono caduti più di 300, di camini quasi un migliaio.

All'ospedale sono stati ricoverati 20 feriti gravi, ed altrettanti sono curati nelle case. Anche l'ospedale però minaccia di cadere, ed una parte del fabbricato con 50 e più letti si dovette in tutta fretta abbandonare.

Lubiana (Laibach) è altra località dove la scossa si sentì con una certa intensità sebbene molto minore che nelle suddette due città. Vittime a Lubiana non ve ne sono, e i danni si limitano a qualche diecina di case lesionate ed a rotture di oggetti d'uso domestico.

« Vengono poi Fiume, Klagenfurt, Marburg e Serajewo ed altre località della Carniola, dell'Illiria e della Bosnia, dove la prima scossa fu più o meno avvertita senza però produrre altro che un pò di pànico nelle popolazioni.

» Non crediamo esagerati i calcoli della *Pol. Corr.* di Vienna che fa ascendere a 10 milioni di fiorini i danni correnti.

» Le relazioni che vengono dalle diverse località dove la scossa fu sentita con una certa intensità recano dettagli di fenomeni curiosi; il suonare dei campanelli; l'eco del tremolio di tutti gli oggetti metallici; il fermarsi contemporaneo di tutti gli orologi a pendolo.

» La formazione dei crateri di fango nelle vicinanze di Agram è descritta da un ingegnere di Resuik, testimonio oculare, come segue:

» In Resuik (sette chilometri distante da Agram) si vede sulla strada una massa fangosa, mischiata di arena. I contadini, che correvano dopo le prime scosse del 9 verso la chiesa, osservarono come in quel sito si alzava ad un tratto dell'acqua fangosa e trovarono una apertura della larghezza di 6 centimetri, la quale mostra precisamente la direzione delle scosse. Arrivando nella selva videro uno spettacolo interessantissimo. La terra aveva una larga fessura ed a due lati di questa si osservò una immensa quantità di piccoli vulcani di fango con crateri già formati. La fessura è lunga circa un miglio; in certi siti è larga un metro, mentre la massa del fango copre attorno i crateri un terreno, qualche volta di una circonferenza di 8 braccia. Uno dei crateri aveva un odore forte di zolfo.

» A Granesina è totalmente rovinata la parrocchia. Anche l'edificio delle scuole fu così malconcio, che non vi si può più insegnare. Quando avvenne il terremoto, il parroco stava dicendo messa ad un altare minore. Fortuna per lui! chè l'altar maggiore fu coperto dalle macerie del tetto e delle volte che caddero. Il parroco svenne, e ci volle del bello a liberarlo. Un campagnuolo, il solo che si trovasse ancora in chiesa col parroco, fu seppellito nel momento che stava per fuggire dalla porta maggiore.

» A san Sintone, presso Agram, la scossa fu così forte che delle case di contadini rimase appena in piedi il 5 %; le altre sono così mal ridotte, che dovranno venir demolite. Danneggiatissime la chiesa e la torre, la qual ultima venne circondata di cerchi di ferro.

» A Burgrove, a Hart ed altrove, pure chiesa, campanile, scuola sono in rovina.

» A Trestenijk, il terreno s'è spaccato in più punti, e ne vien fuori acqua calda mista a sabbia sulfurea verde-scuro. »

Dalle notizie che diedero tanto i giornali quanto i bollettini meteorologici della scossa del mattino del 9 risultava che in Italia quel terremoto non fu avvertito neppure leggermente tranne forse in qualche località del Veneto. A me però risultava dalle osservazioni fatte in Roma e dalle comunicatemi dai più diligenti fra gli osservatori sismici, che le onde sismiche sia pure in forma insensibile erano però giunte poderosissime nella nostra penisola.

Perciò procurai di diramare circolari onde raccogliere il maggior numero possibile di dati e sopratutto attivai la corrispondenza con l'ottimo cultore della nuova sismologia in Trieste, sig. Giulio Grablovitz. Questi non solo per la sua perizia nei nostri studi ma anche perchè più di noi vicino al centro del fenomeno era in grado di darmene ragguagli importanti. Quantunque poi io abbia rinunciato all'intraprendere una vasta analisi di quel fenomeno e mi sia proposto di fornire soltanto i dati italiani intorno a quel fatto, pure mi credo in dovere di dare publicità ad una delle lettere del Grablovitz, perchè in essa sono raccolti elementi che per numero e precisione possono certamente servire ad ulteriori studi sul terremoto di Zagabria.

Ecco adunque ciò che il Grablovitz mi scriveva da Trieste in data del 26 Novembre 1880.

« Ricevetti la Sua lettera del 16, e La ringrazio delle Sue comunicazioni. Gl'indizi del terremoto di Zagabria dati dagli strumenti in Italia al di fuori dei limiti della comune percezione dei sensi, mi provano l'utilità dei metodi da Lei tanto raccomandati; chi sa quale estensione avrà avuto quella scossa, specialmente nella penisola balcanica e *non una notizia* se n'ha da più lunge di Serajevo; sono paesi tanto primitivi che nulla se ne può pretendere, ma ciò che maggiormente devesi deplorare si è che persino a Vienna sembra esservi difetto assoluto di strumenti sismici, a giudicare dalla scarsità dei ragguagli sui terremoti. Il telegramma ufficiale dava come istante del terremoto le $7\frac{3}{4}$ ant. mentre dispacci privati dicevano $7\frac{1}{2}$; il bollettino meteorologico recava in alcuni giornali 7.37, in altri 7.38, di direzione, intensità ecc. non si parla! Ho scritto ad un sismologo di Vienna, che publicò un appello diretto a chiunque sapesse fornire dettagli sul terremoto, e spero di sapere da parte sua qualche cosa di preciso sulle fasi che il fenomeno presentò colà. In generale ho notizia del fenomeno d'una cin-

quantina di località; le 39 che figurano nel quadro che Le do qui appresso sono le sole di cui conosco dati di qualche importanza; per le rimanenti le notizie riguardano soltanto i danni. L'indicazione dell'ora lascia in generale molto a desiderare; meritano maggior fede le controsegnate con asterisco le quali a giudicare dal tenore dell'articolo relativo pubblicato nei giornali, rivelano una certa competenza; in seconda linea vengono quelle espresse in tempo di Praga e Budapest, perchè rilevate dagli orologi fermatisi nelle rispettive stazioni ferroviarie, i quali vengono regolati secondo l'uno o l'altro di quei meridiani; delle ore indicate in tempo locale e non con asterisco non è da fidarsi molto; quelle indicate in rotondi quarti d'ora si raccomandano poco già da per sè. Qualche indicazione (p. es. Zara) potrebbe pure riferirsi al *tempo vero*.

» Ecco pertanto l'elenco:

	Località	Distanza in linea retta da Zagabria	Ora	Meridiano	tm. Roma	Intensità	Durata	Direz.
1	Zagabria		7^{h}34'15''	locale?	7^{h}20'8'	disastrosa	9'' vorticosa	NNE
2	Zdencina	Ch. 23	7 24	»	7 20	»	.	NE
3	Rann	» 30	7 30	Praga	7 17	fortissima	12''	
4	Klanjecz	» 35	7 $^1/_2$	locale?	7 17	forti danni, due feriti	50 a 60''	
5	Reichenburg	» 43	7 25	Praga	7 17	forte		E
6	Krapina-Töplitz	» 46	8 35?				20''	NNE
7	Kreuz	» 50	7 45	Pest	7 19	fortissima, con danni	16''	ESE
8	Sissek	» 50	7 27	Praga	7 19	fortissima	5''	
9	Warasdin	» 60				fortissima con danni e chiusura della scuola		NE
10	Cilli	» 70	7 35	locale	7 23'^{5}	con rombo	10''	NE
11	Krastrigg	» 70	7 30	Praga	7 22	forte con rombo	12''	NE
12	Kopreinitz (Kaproncza)	» 76				forte, screpolature agli edifizi	12''	
13	Marburg	» 82	7 35 7 30	locale Praga	*7 22	3 forti scosse	15'' 2''a3'' ogni s.	NE
14	Zakany	» 89	(4 morti, molti feriti, rovine; attività pubblica sospesa.)					
15	Sagor	» 91	7 32'	Praga	7 24	I debole, II forte	I 4 a 5'' interv. 1'' II 5''	E
16	Radkersburg	» 94	7 $^1/_2$	locale	7 16		10''	NE
17	Nagy Kanisza [Groskanisza, Grosskirchen]	» 106	7 $^3/_4$	Budapest	7 19		3''	E
18	Barcs	» 113	7 47	»	7 20.^{5}	3 scosse forti		NE
19	Lubiana (Laibach)	» 115	7 27	locale	7 18	straordinar. forte	I 2 a 3'' interv. 2'' II 2 a 3''	NE
20	Berbir	» 125	7 34	Vienna?	7 18	forte (sensazione di mal di mare nelle persone)	9''	E
21	Graz	» 140	7 35 7 32 7 31	locale Praga	*7 23		verticoso 20''	ESE
22	Szigetvar	» 147	7 50	Budapest	7 24	3 forti scosse		N
23	Klagenfurt	» 154	7 $^1/_2$	locale	7 23	forte		NE
24	Dervent	» 160	7 55	»?	7 34	assai gagliardo	10 a 15''	N
25	Brood	» 169	7 30 o 35	Praga	7 24.^{5}	gagliardo	3 a 4''	E
26	Trieste	» 173	7 24'32''	locale	*7 19'14''	forte, 3 scosse	30''	pr. NO poi NE

27	Fünfkirchen (Cinque chiese)	» 178	7 43	Budapest	7 17	forte, traballarono persone		N
28	Gorizia	» 186	7 22	locale	7 17		4 a 5''	
29	Zara	» 198	7 3/4	»	7 34	3 scosse suss. Il più forte	10''	
30	Pola	» 202	7 25'30''	»	*7 19'57''	2 sc. di 1'' ciascuna		NO
31	Oedenburg	» 206	7 38	»	7 21'5		5''	E
32	Udine	» 216	7 1/4					
33	Serajevo (Bosna Seraj)	» 276	7 38	*Vienna*	*7 22	discretam. forte		N
34	Vienna	» 286	7 38	locale	7 22			
35	Venezia	» 293	7 26	»	*7 26'5	(Il boll. met. dice da *NE* a *NO*(?)		
36	Budweis	» 367				debolissima		
37	Bologna	» 394	7 21	»	7 25'4		pochi secondi	
38	Budapest	» 450				appena sensibile		
39	Rocca di Papa	» 518	7 30	»	*7 30	segnata dal microsismografo		

» Dalle circostanze delle altre località si comprende chiaramente che Trieste offrì un carattere assai interessante, avendo ricevuto il primo urto da NO, direzione del primo contrafforte delle Giulie, il quale moto si convertì poscia nell'ortogonale, proveniente forse con maggior lentezza, benchè direttamente, dal radiante. Di qui la maggior durata. Prolungando le linee rappresentanti la direzione della scossa nei luoghi situati in vicinanza del radiante ossia nella zona maggiormente scossa (cioè Zagabria, Zdencina, Kreuz e Warasdin), esse s'incrociano precisamente là dove i monti Sleme situati al Nord di Zagabria si congiungono colla catena delle Caravanche, vale a dire fra la valle della Bednia e le sorgenti della Lonia; l'intensità della scossa in quei quattro luoghi avvalora l'ipotesi che il radiante si trovi precisamente nella località designata; tant'è vero che le stazioni ferroviarie Sesrete e Gradec (più prossime rispettivamente a Zagabria e Kreuz) sentirono la scossa più fortemente delle intermedie.

Alcuni vorrebbero porre il radiante fra Zagabria, Sesrete e Gorizia, ma le direzioni delle scosse sono in aperta contraddizione a quest'ipotesi e così pure l'intensità delle medesime. Forse furono condotti alla ipotesi in questione dal fatto che in vicinanza di Sesrete si formarono spaccature e così pure a Gorizia.

» Le fenditure del terreno a Sesrete avevano la direzione $\frac{NE}{SO}$ all'estremità settentrionale e piegavano verso Sud; quello di Gorizia che ne sembrano la continuazione avevano la direzione NNE–SSO. Dalle medesime usciva un liquido fangoso che, secondo l'analisi chimica, conteneva pure piccole tracce di zolfo ed aveva una temperatura di 7'5° C.; erano insussistenti le voci di sorgenti od eruzioni calde, ch'erano state divulgate in seguito al primo annunzio.

» Giungo a cognizione che la scossa a Vienna fu avvertita esattamente a $7^h\ 35'\ 36''$ in direzione S–N; da quanto fu rilevato dal Dr. Ferd. de Hochstetter; quell' ora corrisponde a $7^h\ 19'\ 54''$ t. m. di Roma, per cui sarebbe stato $40''$ maggiore il tempo impiegato dalla scossa a giungere a Vienna in confronto di Trieste, il che è naturale essendo pur maggiore la distanza in linea retta. – Risulta però ancor più evidente che l'ora data dai giornali di Zagabria è errata.

» A Kreuz la scossa fu forse altrettanto forte che a Zagabria, perchè si narra che caddero 50 cammini; 15 a 20 case furono assai danneggiate e taluni pretendono che la durata sia stata di 20 a $25''$; fu dapprima vorticosa, dicesi, poi ondulatoria.

» Le direzioni sono indicate nell' elenco soltanto per uno dei 16 rombi: resta dunque sottinteso il rombo opposto; per es. N. N. E. significa da N. N. E. a S. S. O. – Dove è omessa l'indicazione d'una circostanza, s'intende che non è nota.

» Nella miniera di Wies nella Stiria il terremoto è stato sentito da tutti gli operai che si trovavano alla profondità di circa 30 metri; nulla fu invece avvertito fra i 60 ed i 120 metri dai pur molti operai che vi si trovavano.

» Ecco le scosse avvertite dopo la prima a Zagabria:

9 Novembre 7.40 ant. 8.27′ 55″ e 10.50 ant. 11.0 pom.
10 » 5.0 e 6.15 ant. deboli – 8 ant.
11 » scosse nel mattino, poi 11′ 1′ 10″ e 11.26 ant.

» Ho notizia che fu sentita anche a Crakathurn sulla linea Pragerkoff-Nagykanisza e nella bassa Stiria, cioè fra Cilli e Marburg.

» Quest'ultima fu forte; la gente fuggì dall'aula municipale, mentre si leggeva il protocollo riguardante appunto certi provvedimenti pel terremoto.

12 » 6.15 e 9.0 pom.
13 » 10.20 pom.
14 » 10 ½ pom. debole.
15 » 1.30, 4.0 e 10.30 ant. 9.2 pom. debolissima e 9.12 pom.
L. P. ☉ 16 » 0.3′ ant. 0.48′ ant. 0.49′ ant. 1.9 ant. 3 ant. 4.22 ant. 5.24 e 6.30.
17 » 10.15 pom. 1′ e 4.55 ant. ambidue deboli.
18 » (Alle 2.3′ pom. rombo senza scossa) 3.22 pom. deboliss.ª
19 » (Alle 0.20 ant. rombo) alle 11.25 pom. forte.
20 » 0.30 ant. più forte della precedente (1.16 p. forte scarica elettrica) 9 ½ pom. debolissima.

21 » 9.9 ant. e 3.17 pom. deboli.

22 » 2.30 pom. (rombo alle 5.15 pom.)

23 » 4.30, 5.15, 5.35, 10.30, 11.16 pom. tutte assai deboli.

24 » 3.43, 5.40, 6.44 ant.

Da Kreuz si ha notizia delle seguenti scosse dopo la prima:

10 Novembre $1^h25'$ e $3^h40'$ leggiere.

11 » $11^h45'$ sensibile.

12 » $8^h50'$ sensibile, $1^h10'$ e $3^h14'$.

Non è detto se ant. o pom.; sembra verosimile che siano ore *di giorno.* Una sola, quella dell'11, ha una vicina corrispondenza con quella di Zagabria e precisamente la più forte dopo la prima, che fu la più disastrosa. »

« G. Grablovitz. »

Come ognuno vede il Grablovitz ha istituito un vero studio sul terremoto del 9 Novembre ed è perciò che egli più d'ogni altro potrebbe darne un ragguaglio scientifico. Quindi a lui dedico le seguenti osservazioni italiane senza addentrarmi troppo nell'analisi di questo terremoto che come ho detto può esser da altri a massime del Grablovitz assai meglio di me studiato.

Nel riferire le notizie fornitemi degli osservatori italiani fornirò anche le negative e prima d'ogni altra mi pregio far luogo alla risposta del Palmieri.

« Napoli 25 Novembre 1880.

» Quando il Vesuvio è in calma gli apparecchi sismici accennano anche preventivamente a terremoti più o meno lontani; ma quando il Vesuvio è in attività, con fasi frequenti di energia, le indicazioni sismiche corrispondono al fatto locale avendo anch' esse le loro fasi, senza giungere mai a zero, e però non si potrebbe dire se alcune di quelle indicazioni potessero avere attinenze con commozioni del suolo in altre contrade: mi duole quindi di non potere appagare i giusti desiderii della S. V. »

Il giornale *Roma* poi così scriveva intorno al Vesuvio nel seguente giorno 10 Novembre: « L'eruzione continua tutte le sere a mostrarsi bellissima. La lava ora si divide ed ora si ricongiunge presso l'atrio del cavallo. In cima al cratere di tanto in tanto si veggono slanciate a notevole altezza materie incandescenti. »

Per esser breve sopprimerò ogni discussione sull'ora del terremoto nelle stazioni italiane come lavoro più o meno fatto dal Grablovitz. Dico poi in generale che la determinazione dell'ora in Italia è stata difficilissima perchè in veruno dei nostri osservatorii hanno funzionato gl'istrumenti capaci

di rivelare un urto brusco, e dei quali generalmente ci serviamo per arrestare o muovere un orologio. Furono generalmente i soli pendoli che oscillarono fortemente dapertutto mentre niuno avvertì tremare il suolo. Ciò significa che le onde sismiche giunsero lente e larghe quantunque dovettero essere grandissime come apparisce dalle seguenti osservazioni.

Roma. Alle 8,30 ant. cioè un'ora dopo la scossa io cominciai le osservazioni giornaliere, trovai dunque nei sismografi il residuo del movimento. Un pendolo lungo circa un metro oscillava in ellissi, il cui asse maggiore era di 5 mm. Il tromometro normale percorreva 30 divisioni della scala micrometrica in direzione N–S. Il movimento andò decrescendo, ma durò notevole fino alle 10 ant. Le correnti elettriche telluriche erano assai perturbate.

Rocca di Papa. Dal mio osservatorio sul cono vulcanico Laziale mi pervenne la notizia di un moto straordinarissimo visto nel tromometro normale percorrente cioè 271,44 gradi del valore intensivo in direzione SO–NE. Il moto stesso durò poi diminuendo fino alle 10 ant. circa.

Velletri. Il Galli aveva cominciato le osservazioni alle 6 ant. Fino alle 7 trovò tutto in tranquillità. Tornato alle 8 nell' osservatorio vide il tromometro normale che percorreva 85 divisioni della scala micrometrica in direzione E–O. Il moto era assai conico e durò decrescendo fino alle 10,30.

Terracina. L'Ingegnere Remiddi possiede un piccolo sismografo consistente in un pendolo che traccia sulla sabbia le proprie oscillazioni. In quel giorno nulla vi notò.

Ceccano. L'ingegnere Bovieri ebbe la scossa notata da un sismografo a a pendolo registratore e nel tromometro alle 7,15 ant. trovò l'oscillazione del valore intensivo straordinarissimo di 70.

Foggia. Il Prof. Nigri alle 8 ant. vide nel tromometro normale un moto di NO–SE dell' ampiezza di 45 div. Il moto durò fin presso alle 10 ant.

Civitavecchia. Il Sig. A. de Andreis osservò il tromometro normale alle 8,30 ant. e vi trovò il moto forte, ma non straordinario di 4,25 in direzione N–S. Era però mosso anche il declinometro.

Viterbo. Il Prof. Medichini osservò il tromometro alle 6,18 ant. Lo trovò appena mosso. Il microfono però gli dava suoni continui come di campana. All'ora del terremoto di Agram non fece osservazioni.

Foligno. Il Sig. D. Luigi Boncompagni nella sua villa *Quiete* conserva alcuni istromenti sismografici. All'ora della scossa di Agram non ne ebbe verun sentore. Ma alle 11, 50 ant. senza avvertire scuotimento gli si produsse nel sismografo a pendolo una traccia lunga 13 mm. per una ondula-

zione di NO–SE. È veramente caso strano che niun segno egli avesse della scossa generalmente notata, e che poscia trovasse un segno così grande in ora tranquilla per le altre stazioni.

Narni. Il Prof. D. Romeo Fagioli osservò il tromometro normale alle 9 a. trovandovi una forte oscillazione del valore intensivo 8 e più.

Fermo. Il Prof. Massetani alle 6, 15 trovò calma completa nel tromometro normale. Alle 7, 30 fu avvertito in città un leggerissimo terremoto.

Alle 9, 30 il movimento del tromometro era già ridotto al piccolo valore intensivo di 1, 54.

Monte Fortino d' Ascoli. Lo stesso Massetani mi fece sapere che in quella stazione sismica alle 8 ant. il tromometro oscillava percorrendo un arco del valore intensivo di 72, 09 in direz. E–O, ed alle 12, 40 p. era completamente fermo.

Ancona. Mi scrisse il Prof. de Bosis che alle 7, 30 precise fu sentita una leggera scossa ondulatoria.

Camerino. Il Prof. Berti osservò una notevole perturbazione magnetica nel mattino.

Urbino. Il Prof. Serpieri scrive che alle 7, 22 ant. vi fu prima pioggia, e poscia forte e lungo terremoto sentito da tutti che il sismografo segnò in direzione da E e durò 10'' e più.

Firenze. Il Prof. Bertelli trovò alle 8, 25 nel tromometro, il cui pendolo è lungo m. 3, 35, una oscillazione del valore intensivo di 15, e nel tromometro normale l'oscillazione di 5 parimenti intensiva. Nel suo isosismometro poi trovò segnate due scosse in direzione fra loro ortogonali, cioè una di 2mm. SE–NO, l'altra $1\frac{1}{2}$ mm. NE–SO.

Livorno. Il Prof. Monte visitò il tromometro normale alle 9 ant. e vide che oscillava fra N e S percorrendo 16 div. del micrometro.

Bologna. Nel ricco osservatorio sismico del Conte Malvasia le indicazioni riuscirono molteplici e preziose. Alle 7, 07 ant. il tromometro normale era quasi tranquillo.

Alle 8, 23 ant. l'oscillazione per 13, 02 linee del micrometro pari al valore angolare 53'',0 ed al valore intensivo di 19,7 con moto di SE–NO.

L'ortosismometro del Bertelli indicava un forte moto non sussultorio, ma orizzontale. L'isosismometro avea mossi gli indici a SE–NO di mm. 49.

Il pendolo lungo 7 metri alle 8, 10 oscillava per lo spazio di 23 mm. in direzione SE–NO. Il pendolo lungo 16 metri avea urtato i labri del piattello con la sabbia che gli sottostà ed avealo spostato lasciando traccia di aver fatto il movimento tra SE–NO.

Un piccolo sismografo del Cecchi avea pure dato una traccia di mm. 2 in direzione SE–NO. Niun moto subitaneo si verificò nel livello dell'acqua del pozzo, niun distacco della calamita dall' ancora, niuna alterazione di corrente tellurica, e sopratutto è notevole niun segno aver dato gli avvisatori di urti sismici che sogliono dare indicazioni anche dei moti i più insensibili.

Niuno avvertì la scossa che al sismografo del R. Osservatorio fu determinato essere avvenuta alle 7, 21, 16 del t. m. di R.

Modena. Il Prof. Ragona direttore del R. Oss. scrive che nulla fu avvertito neanche dai sismografi.

Alessandria. Il direttore dell'Oss. meteor. Prof. Volante trovò che alle 7, 30 del t. m. di R. tanto un sismografo collocato a pianterreno, quanto un altro collocato a 20 m. circa sul suolo indicarono una leggera scossa ond. NE–SO. Anche il declinometro collocato a 16 m. d'altezza dal suolo oscillava. Nel tromometro normale poi alle 7, 30 incirca il pendolo percorreva 66 divisioni della scala micrometrica in direzione NE–SO.

Volpeglino. Dall'Osservatorio meteorologico sappiamo che alle 7, 28 del t. m. di R. vi fu il terremoto ond. NE–SO.

Verona. Il Prof. Goiran notò che la scossa di Zagabria fu avvertita da pochissime persone e fu segnata dal Microsismografo. Inoltre nelle ore ant. tutti i pendoli dell'Osservatorio manifestavano movimenti ondulatorii leggeri, ma pronunciatissimi.

Vicenza e *Colli Berici.* Il Conte da Schio ha raccolto le osservazioni della regione e ne risulta che il terremoto si fece più o meno generalmente sentire in due o tre riprese ondulatorie fra N e S alle 7, 26 del T. m. di R. In un pendolo che traccia sulla sabbia fu rilevato un segno ellittico in direzione NNE–SSO.

Venezia. Il Prof. M. Tono era assente dall'Osservatorio, ciò non ostante dal sismografo Cecchi potè rilevare che alle 7, 26 t. m. di R. vi fu una scossa ond. E–O con qualche sussulto durando il fenomeno forse un 6''. Secondo altre notizie parve avvertita in città sensibilmente ondulatoria in direzione SE–NO.

Belluno. Notizie del Prof. Fulcis ci informano che alle 7 $\frac{1}{2}$ fu avvertita la scossa da parecchi in senso ondulatorio.

Assiago. Dai registri dell'Osservatorio apparisce che alle 7, 20 fu avvertita scossa sensibilissima.

Prima di riassumere i dati delle osservazioni italiane del giorno 9 de-

vesi ricordare che le scosse continuarono nei giorni successivi secondo che ne ha dato un catalogo anche il Grablovitz. La più terribile ripresa fu nella notte e mattina del 16 che viene così ricordata più o meno dai giornali:

« Il panico prodotto dalle nuove scosse di terremoto verificatesi nella notte del 16, è indescrivibile. I colpi furono cinque. Il primo avvenne a mezzanotte, e finirono alle 4 22. L'ultima scossa fu la più forte. La notte era piuttosto fredda, ma tutta la gente usciva. Si calcola come una fortuna che le scosse sieno venute a distanza una dall'altra: 12 3 — 12 5 — 1 30 — 3 — 4 22. Di tutte insieme, l'effetto sarebbe stato tremendo. La gente s'aggirava perduta per le strade e non parlava che del modo di fuggire e della direzione da prendere.

» Le piazze e le vie erano piene di uomini spaventati, di donne disperate, di fanciulli che mandavano grida pietose. Un terribile quadro notturno! La luna splendeva bellissima in un cielo tempestato di stelle, mentre nell'interno della terra v'era tanta lotta di elementi!

» Quasi ogni colpo era preceduto da un rombo. Dalla montagna si udivano forti detonazioni. Si credeva sempre che, nel prossimo minuto secondo, avverrebbe la catastrofe totale. Questa fu la notte più spaventosa di tutte. Secondo altri le scosse non furono cinque ma almeno otto.

» Alla mattina, molti altri lasciarono la città. Per la sera si attendeva una ulteriore fuga in massa. »

Nei quadri sinottici dei fenomeni endogeni che son solito pubblicare nel Bullettino del Vulcanismo italiano apparirà il preciso elenco delle scosse diverse che dal 9 Novembre hanno agitato la Croazia e l'Italia fino al 31 Decembre, perciò qui non è necessario di più trattenersi in questo particolare. Soggiungo però uno specchio delle ore nelle quali dal 9 Novembre al 31 Decembre si notarono movimenti sismici sia avvertendosi il terremoto sia deducendolo dalle indicazioni degli istrumenti negli osservatori sismici d'Italia. Queste seconde sono contrassegnate con asterisco. Lo specchio è poi diviso topograficamente in sei colonne corrispondenti a vaste zone di suolo. La moltiplicità delle indicazioni agruppate in alcune colonne massime in quella della Italia centrale non dimostra una frequenza speciale dei moti del suolo in quel punto, ma la abbondanza della raccolta fatta dal maggior numero ivi esistente di osservatôri e di studiosi. Veggasi in ciò quanto sarebbe desiderabile veder moltiplicato questo genere di osservatôri. In quel tempo la regione dei moti sismici non era l'Italia ma bensì la Croazia, l'Istria, l'Austria e l'Ungheria. Da quella regione però non ci pervennero altre notizie che quelle dei fatti sensibili e paurosi. Ognuno vede quanta

luce avrebbe potuto esser fornita alla scienza da una serie di osservazioni e di osservatôri. Ma qui taluno potrà notare che una ricca serie di dati dovea esser fornita dall'Osservatorio Nautico di Trieste che con tanto savio intendimento avea fin dal 1878 fondato un ricco gabinetto speciale sismologico corredato di molti ed ottimi istrumenti quanti e quali poche delle nostre stazioni italiane posseggono. Un deplorevole incidente, però accompagnato da un eccesso inqualificabile di disciplina burocratica distruggeva l'opera fatta appunto quando essa dovea dare i suoi frutti. Il 9 Novembre l'osservatorio servì come dovea, ma il 10 era destinato che si smontasse e si sospendessero le osservazioni per ripulire le pareti e riattare il locale. Nulla valse a trattenere la materiale esecuzione dell'ordine ricevuto. L'osservatorio sospese le sue funzioni per tutto il tempo che avrebbe potuto fornire dati alla scienza.

DISTRIBUZIONE TOPOGRAFICA ED ORARIA

DEI TERREMOTI E DEI MASSIMI MICROSISMICI

DURANTE IL PERIODO SISMICO AUSTRO—ITALIANO DEL NOVEMBRE—DECEMBRE 1880.

1880 Novembre	Svizzera Austria Germania		Veneto Lombardia Piemonte		Liguria Emilia Romagne		Toscana Marche Umbria		Provincie romane Terra di Lavoro Abbruzzi		Campagna Felice Puglie Basilicata Capitanata		Calabrie Lipari Sicilia Malta	
	Ore ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.
5	—	—	—	—	—	—	—	—	7*	7	—	—	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	0 1/4	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	3 1/4 8 1/2* 9* 9 1/2 10 1/2 11 3/4*	1 1/4* 2 1/2* 2 3/4*	—	—	—	—
8	—	—	—	11 1/2	—	—	8	3.00 8 3/4	10 1/4*	1 1/2* 2 3/4* 4 3/4*	—	—	—	—
9	7 1/2 7 3/4 8 1/2 10 3/4	11	7 1/2	—	7 1/2*	—	7 1/2 11 3/4	—	7 1/2*	—	7 1/2*	—	—	9 1/4
10	5 6 1/4 8	1 1/2 3 3/4	—	—	—	—	—	0 3/4	—	—	—	9 1/2	—	—
11	4 11 1/4 11 1/2	—	—	—	—	—	—	—	—	7 1/4	—	—	—	—
12	8 1/2	1 1/4 3 1/4 6 1/4 9	—	—	—	—	—	—	9*	—	—	—	—	—
13	—	10 1/4	—	—	—	—	10*	—	2*	1 1/4* 11*	—	—	—	—
14	—	10 1/2	—	—	—	—	—	—	4* 5* 6 3/4* 7 1/2* 8* 8 1/2* 9* 10 1/2* 11* 11 1/2*	0 3/4* 1 1/2* 1 3/4* 2* 2 1/4* 2 3/4* 3 1/2* 3 3/4* 4* 4 1/4* 4 1/2* 4 3/4* 5 1/2* 8 1/4 10* 10 1/2	—	—	—	—
15	1 1/2 4 10 1/2	9 9 1/4	—	—	—	—	—	—	3* 4 3/4* 5 1/4* 7* 8* 9 1/4* 10 1/4* 11*	0 1/2 4*	—	—	—	—
16	0.3 0 3/4 1 1/4 3 4 1/2 5 1/2 6 1/2	—	—	—	—	—	—	—	10* 11 1/4*	0 1/4* 1 1/4* 4*	—	—	—	—

Novembre 1880	Svizzera Austria Germania		Veneto Lombardia Piemonte		Liguria Emilia Romagne		Toscana Marche Umbria		Provincie romane Terra di Lavoro Abbruzzi		Campagna Felice Puglie Basilicata Capitanata		Calabrie Lipari Sicilia Malta	
	Ore ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.
17	1 4 3/4	10 1/4	—	—	—	—	—	1 1/2*	10 3/4* 11 3/4* 12	1* 3 1/2* 3 3/4* 4 1/4* 5 1/2* 8 1/2* 9 1/4* 9 1/2* 9 3/4* 10*	—	—	—	—
18	—	2 3 1/2	—	—	—	4 1/4*	—	1* 9 3/4*	1 1/2* 4 1/4* 5 1/4* 9 1/4*	3* 7 1/4*	—	—	—	—
19	0 1/4	11 1/2	—	—	—	—	—	0 3/4*	10 3/4*	0 1/4* 1 1/2* 2 1/4* 3 3/4* 6 1/2* 9 1/4* 10*	—	—	—	—
20	0 1/2	9 1/2	—	—	—	—	—	—	3* 8 1/2*	3 1/4* 5 1/2* 7 1/2* 8 1/4* 8 1/2* 11 1/4* 11 3/4*	6 1/2	—	—	—
21	9	—	—	9	—	—	—	—	0 1/4* 1* 1 3/4* 2* 8 1/4* 8 3/4* 9* 9 1/4* 11*	2 1/4* 3 1/2* 11 3/4*	—	—	—	—
22	—	2 1/2 5 1/4	—	—	—	—	—	—	0 1/2* 2* 2 1/2* 3 3/4* 11*		—	—	—	—
23	—	4 1/2 5 1/4 5 1/2 10 1/2 11 1/4	—	—	—	2 1/4 3	—	—	6 3/4*	2* 3 3 1/4* 3 1/2* 4 1/2* 8 3/4* 10*	—	—	—	—
24	3 3/4 5 3/4 6 3/4	—	—	—	—	3	—	—	8 3/4*	—	—	—	—	—
25	1	—	—	—	—	—	—	—	—	3-5* (?)	—	—	—	—
26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4-8* (?)	—	—	—	—
27	5 3/4	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—
28	notte	—	—	—	—	—	—	—	—	1 1/2	—	—	—	—
29	notte	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—
30	notte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Dec. 1	notte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11	1 1/2
2	notte	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11 3/4*	—	—	—	—
4	2 1/2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1880 Decembre	Svizzera Austria Germania		Veneto Lombardia Piemonte		Liguria Emilia Romagne		Toscana Marche Umbria		Provincie romane Terra di Lavoro Abbruzzi		Campagna Felice Puglie Basilicata Capitanata		Calabrie Lipari Sicilia Malta	
	Ore ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.
5	3 3½	9½	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3*	—	—
6	—	—	—	—	—	—	—	—	9*	9½*				
7	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
8	0½ 6½ 7¾	—	—	—	—	—	—	—	8¼* 9¼*	—	—	1—2	—	—
9	notte	—	—	—	—	—	—	—	9½* 11 2/4*	2½* 3* 3¾*	—	—	—	—
10	3½	0½	—	—	—	—	—	—	8* 8¼* 8½* 8¾* 10½* 11*	1½*	—	—	—	—
11	summo mane	—	—	—	—	—	—	—	—	6½* 8½*	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2* 2½* 2¾* 3¾* 4¼* 5* 6½* 7* 8* 8½* 9* 9¾* 10* 10½* 11* 11¾*	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	—	0¼* 1¾* 2* 2½* 3¼* 3¾* 7¾*	11¼*	—	—	—	—
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5* 5¾* 6½* 6¾* 7½* 9¾* 10* 10½* 11½* 11¾*	—	—	—	6
15	—	—	—	—	—	—	—	—	0¼* 4¼* 5* 11½*	0¼* 1¼* 1¾* 2½* 2¾* 5* 5¼* 6½* 7¼* 7¾* 9¾* 10* 11* 11½*	—	—	—	—
16	—	11	—	—	—	—	—	—	8* 8¾* 9¼* 9¾* 10* 10¼* 10¾* 11½*	—	—	—	—	—

1880 Decembre	Svizzera Austria Germania		Veneto Lombardia Piemonte		Liguria Emilia Romagna		Toscana Marche Umbria		Province romane Terra di Lavoro Abruzzi		Campagna Felice Puglie Basilicata Capitanata		Calabrie Lipari Sicilia Malta	
	Ore ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.	ant.	pom.
17	notte e	giorno	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	7½*, 8*, 8½*, 8¾*, 9¼*, 9¾*	0¼*, 9¾*, 10*	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	10¼*, 9¼	0¾*, 1*, 11*	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	—	—	—	8½*, 9*, 9¼*, 9½*, 10¼*, 11¼*, 12*	0¼*, 0¾*, 1¼*, 2¼*, 2½*, 2¾*	9¾ (ant. o	pom.?)	—	—
21	—	—	—	—	—	—	—	4½	10*	2¼*, 2½*, 3*, 4¼*, 4½*, 7½*, 7¾*, 8*, 8½*, 9½*, 9¾*, 10*, 10¼*, 10½*, 10¾, 11*, 11¼*	—	—	—	—
22	—	—	—	—	—	—	—	—	11¾*, 12*	0¼*, 0¾*, 9½, 10¼*	—	1½	—	—
23	notte e	giorno	—	—	—	—	—	—	—	8¾, 10¼	—	—	—	—
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2½*, 2¾*	—	—	—	—
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
26	—	—	—	—	—	—	—	—	7¾*	1½*				
27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7¾*	—	—	—	—
28	—	—	—	—	—	—	—	—	6½*, 7¼*, 7½*, 8¼*, 8¾*, 11¼*, 11½*, 11¾*, 12*	0¼*, 0½*, 0¾*, 1*, 1¾*, 2*, 2¾*	—	—	—	—
29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
31	—	—	—	—	—	—	—	—	notte?	—	—	—	—	—

Come ho già detto io mi guardo dall'entrar nell'analisi topografica generale del terremoto di Agram, spettando tale argomento ai geologi e fisici della regione principalmente scossa. Io voglio solo analizzare la parte italiana di questo grandioso fenomeno. Sotto due aspetti deve essere considerato questo terremoto come già qualunque altro: 1° cioè isolatamente il principale movimento del suolo ossia quello delle 7 $^1/_2$ ant. del giorno 9 novembre; 2° il periodo sismico al quale questo stesso appartiene, considerandolo e nel tempo e nello spazio. Deve insomma studiarsi la fase della attività endogena nella quale culmina il terremoto di Agram e nella regione investita e nella successione ad intervalli fra le scosse diverse. Cominciando dal 1° punto di vista da quanto ho riferito delle osservazioni, si è ben visto che nel Veneto ed in qualche luogo della costa adriatica l'urto sismico del 9 si rese sensibile in Italia. Ma esaminando i dati sismografici vediamo che quasi tutta l'Italia risentì di quel terremoto. Ciò sembrerebbe non avere grande importanza essendo chiaro che il dileguarsi della onda sismica nelle regioni lontane dal centro del movimento deve finire per produrre un terremoto microscopico ed insensibile ossia una agitazione microsismica. Ma vedendo questo terremoto microscopico produrre nella generalità degli istrumenti segnali di tanta ampiezza quanta non ne diede giammai, secondo l'esperienza dell'ultimo settennio, nessuno dei terremoti anche fortissimi che sperimentammo, la quistione s'impone da per sè come importante negli studi sismologici.

Senza invocare l'esperienza generica del settennio ebbesi un confronto importante fra i segni sismografici del medesimo istrumento e nel medesimo osservatorio poco dopo il terremoto di cui parliamo. Vedemmo in Bologna, dove la scossa di Agram non fu da veruno avvertita, il pendolo lungo m. 16 nell'osservatorio Malvasia spostare perfino il piattello che gli sottostava superandone il diametro colla oscillazione. Dovrò descrivere più appresso che ai 24 gennaio 1881 uno spaventoso terremoto urtò la città di Bologna facendo perfino cadere molti fumaioli dalle case e facendone fuggire gli abitanti. Si crederebbe che a tanta scossa gli istrumenti dell'osservatorio Malvasia avessero dato i più grandiosi segnali. Invece quel medesimo pendolo lungo 16 metri appena tracciò una traccia di due millimetri. Questo esempio corrisponde al fatto generale suddetto che nell'esperienza settennale niun terremoto sensibile avea prodotto nei sismografi segnali paragonabili agli ottenuti nel 9 novembre per una scossa sensibile. Tutto ciò conferma leggi sismiche da me già formulate. Allorchè io ho

provato che un terremoto microsismico può essere grandissimo, ed in pari tempo insensibile, la maggior parte dei fisici mi consentì; ma non manca chi stima la teoria paradossatica. Io mi basava in seguito alle osservazioni ed alla esperienza sul fatto che la crosta terrestre similmente ad una lamina vibrante è capace per gli urti sismici di vibrare con onde di celerità diverse cominciando dalle più celeri simili a quelle d' una corda sonora che produce una nota musicale acuta fino alle lentissime verificate talvolta che rendono il terremoto visibile a distanza nel piegarsi degli alberi. In questi casi è avvenuto di poter vedere l'onda sismica nell' inclinare delle piante ed aver tempo d' attenderla per sentirla passare sotto i propri piedi. Quindi negli effetti del terremoto sono due i fattori che influiscono, cioè la qualità dell'onda e la sua durata. Da ciò consegue esser possibile un terremoto grande ed insensibile , e uno violento spaventoso ed innocuo. Lo che tradotto in linguaggio sismografico equivale a terremoto insensibile , ma segnato fortemente dalla ondulazione dei pendoli e sensibile non punto tracciato dai sismografi di che vi sono moltissimi esempii. Ciò avvenne in Italia nel terremoto di Agram ; i sismografi a pendolo diedero traccie eccessive mentre, nè si avvertirono le scosse, nè scattarono i congegni dei sismografi, i quali risentono degli urti bruschi ed istantanei. Le onde sismiche dunque furono molte ed ampie, ma lente e tranquille. Ognuno vede in questi fatti ed in questi esempi la importanza o piuttosto la necessità delle osservazioni sismografiche continue per mezzo di opportuni, molteplici e variati istrumenti.

Venendo poscia al secondo punto di considerare cioè il terremoto di Agram in relazione alla fase d' attività terrestre ed alla regione scossa, sembrami sufficiente uno sguardo allo specchio delle ore e de' luoghi di movimento nei due mesi di Novembre e Decembre 1880. In quello specchio sono divise le ore antimeridiane dalle pomeridiane, acciò si veda sensibile il fatto evidente della frequenza colla quale le scosse o le agitazioni microsismiche si ripetono ad intervalli precisi o vicini alle 12 ore. Oltre a ciò veggonsi alcune ore preferite in tutto il periodo, lo che conferma l' esistenza degli intervalli predetti. È poi interessante vedere come questi periodi orari si completano maggiormente col computarvi i fenomeni che avvengono in regioni diverse, e che compariscono pure col medesimo andamento di periodi orari. Ognuno vede che se ciò già tanto apparisce colla somma scarsità delle notizie nelle regioni non comprese nell' Italia centrale , assai meglio risulterebbe da una serie più estesa di osservazioni. Nè si dica che la mag-

gior quantità di osservazioni farebbe cessare forse l'apparenza di questo fatto della periodicità, perchè se ciò fosse lo vedremmo già nella colonna dell'Italia centrale, che essendo ricca di Osservatorii dovrebbe far scomparire gli intervalli periodici se essi non esistessero. Del resto ciò che vediamo in questi specchi del Novembre e Decembre 1880, è quello stesso che compariva già in altri antecedenti che ho riferito nel 2° volume della Meteorologia Endogena.

Due importanti conclusioni discendono a mio modo di vedere dalle relazioni orarie e topografiche rappresentate dai riferiti specchi. La prima si è il divenire ogni dì più chiara la intima connessione dell'attività interna delle diverse regioni in guisa da poterla considerare come un solo apparato di azioni dinamiche. La seconda è l'esser sempre più dimostrata l'identità d'origine tanto dei terremoti che delle agitazioni microscopiche dei pendoli cui il Bertelli attribuì il nome di moti microsismici. Se i moti microsismici si innestano e si identificano con i veri moti sismici nel tempo e nello spazio non possono esser altro che due modi di manifestarsi dello stesso fenomeno terrestre.

Terremoti di Bologna e Firenze dal 24 al 27 Gennajo 1881.

Per dovere di gratitudine e di giustizia debbo riferire testualmente le relazioni inviatemi dai dotti sismologi e possessori di gabinetti per le osservazioni che si trovarono nella regione delle scosse. Essi sono il Bertelli ed il Cecchi per Firenze, il Conte Malvasia per Bologna tutti nomi illustri nell'attuale risorgimento degli studi endodinamici in Italia. Non voglio però omettere per prime le notizie fornite in Bologna dal Prof. A. Saporetti, Direttore del R. Osservatorio di Bologna, che scrisse in data 25 Gennajo alla *Gazzetta dell' Emilia* :

« Nel giorno 24 corrente, alle ore 5, minuti 4 e secondi 8 pom., a tempo medio di Roma, è avvenuta una fortissima scossa di terremoto *vertiginoso* il cui primo movimento è stato nella direzione dal sud al nord) per tre secondi circa, preceduto da un forte rombo e susseguito da un altro movimento ondulatorio per 5 secondi circa nella direzione dall'est all'ovest.

« Dopo la mezzanotte del 24 corrente, a 29 minuti e 53 secondi, a tempo medio di Roma, è accaduta un'altra piccola scossa di terremoto ondulatoria per un tre secondi quasi nello stesso senso della prima.

« Alle ore 7, minuti 56 e secondi 35 antimeridiane del 25 corrente, a

tempo medio di Roma, è stata avvertita una terza scossa piuttosto sensibile di terremoto, sussultoria ed ondulatoria, per un quattro secondi nella direzione est-nord-est, accompagnata da un piccolo rombo. »

Gabinetto Tromosismico Malvasia di Bologna (24 Gennaio, ore 7 pom.)

« Lunedì 24 Gennajo 1881. Una fortissima scossa di terremoto è avvenuta in Bologna alle ore 5.04.3 pom.: t. m. di R. della durata di sei pulsazioni, preceduta e continuata la scossa con basso rombo proveniente da N-NO. Se la scossa fosse continuata ancora, e l'intensità fosse stata maggiore anche di poco, chi sa quanti guai vi sarebbero a lamentare.

» Alcuni vasetti di cristallo leggeri nella camera dell'Osservatorio posti sopra una lastra di marmo lunghi 7 cent., alti 8, larghi 4, e nel senso della lunghezza per metà circa soltanto poggianti sopra la lastra, l'uno a Sud, l'altro a Nord, si sono rovesciati. Alcune statuette di gesso sono cadute. Una scansia da libri, battendo nelle pareti del muro, ha fatto cadere un libro. Alcune stecche da bigliardo poste verticali nella barriera, sono uscite dall'appoggio, e cadute in terra. Un tratto di fili telegrafici lungo forse 40 metri, ed abbastanza tesi, si sono veduti fortemente sbalzare. Alcune campane ed i campanelli della casa hanno suonato dei rintocchi. Le campane sospese poco o nulla hanno ondeggiato forse pel movimento prima ricevuto dal moto verticale. Quattro vasi di porcellana alti 70 cent. sopra due tavole di legno con lastra di marmo, ed appoggiate al muro avevano conseguito un forte movimento. Un orologio regolatore a lungo pendolo pesante posto nel gabinetto tromosismico a due metri sotto terra nella direzione NE-SO non si è arrestato, come non si sono arrestati gli altri due orologi simili a pendolo lungo e pesante nel piano di mezzo della casa, l'uno nella direzione suddetta NE-SO, l'altro NO-SE. Quattro orologi sulle tavole di marmo del cammino a corto pendolo, uno solo si è fermato, quello cioè posto nella direzione N-S. — L' acqua nel pozzo subitamente si è commossa, alzandosi il livello di mill. 13 ed altrettanto abbassandosi, rimettendosi tutto al livello di prima. Non si può però conoscere se prima sia avvenuto l' innalzamento o l'abbassamento del livello dalla traccia lasciata nella carta, ma trovasi di più un segno come un nastro con appendice che si volge a NE di questa forma ed ampiezza 8. — Il pendolo della lunghezza di metri 6,950 ha lasciato una traccia di mill. 7 in lunghezza e di due in larghezza con una corona di 6 punti fuori della trac-

cia lasciata, proveniente forse dallo sbalzo prodotto nel pendolo pel moto verticale della scossa. Il pendolo lungo metri 17, 170 ha esso pure lasciato una traccia di quattro lati quasi regolari ogni uno di 5 millimetri a N. S.E.O., con un' appendice verso SE. – Il pendolo poi triangolare del P. Cecchi per l'urto verticale si è capovolto.

» La scossa è stata sussultoria da prima, poi ondulatoria, e probabilmente ad un tempo sussultoria, ondulatoria e vorticosa. Nell' Ortosismometro la scossa verticale si è mostrata dell' ampiezza totale di 11 millimetri, e nel senso del terreno abbassato e nel senso del sollevamento. – Gli aghi poi dell' Isosismometro hanno mostrato la scossa orizzontale predominante nelle seguenti direzioni, cioè: Nella direzione SE–NO dell'ampiezza di mill. 137, nella direzione SO–NE; di mill. 124 come nell'altra E–O; e nella direzione N–S di mill. 8,5. Nell' Avvisatore del P. Bertelli tutte le palline sono cadute tranne quella a Nord. Nell' Avvisatore Malvasia la palla è caduta a N–O. Da tutto l'esposto si deve ritenere che la scossa sia stata nella direzione NO–SE. Nessun accenno sismico o distacco dell' ago dalla sbarra magnetizzata. Il Barometro alle ore 3.19 p. segnava O 766.29, alle 5.10, 765, 55; alle 5, 44, 766, 85; alle 6, 27, 767, 95. Il tromometro a Sud segnava gradi 5,0 sotto zero. Dall' 11 del mese, il terreno è coperto dalla neve, la quale raccolta e sciolta si è ottenuta l'altezza di mill. 50, 418. Non spirava vento. Il cielo era sereno, l' orizzonte Nord nuvoloso. Prima delle 5. 58. 39 p. è venuta una piccola scossa, prevalendo la direzione N–S indicata dal sismoscopio Malvasia. Il tromometro normale già alle 11.21 ant. segnava tremolìo, segnale di probabile terremoto per Bologna; dopo la scossa come gli altri pendoli entro il gabinetto avevano un tale movimento di roteazione il quale continua ancora al presente (ore 7.30 p.). Lo spavento in tutti quelli che hanno avvertito il terremoto è grande, e le persone nella strada emettevano grida fortissime ».

24 *Gennaio* 1881. (2ª Comunicazione).

« Ecco la continuazione del rapporto antecedente di quest'oggi, riguardante la forte scossa avvenuta alle ore 5, 04, 3 pom. t. m. di Roma.

« Il moto rotatorio del pendolo del Tromometro normale, il quale continuava alle ore 7, 50, alle 10, 35 era cessato e non indicava se non una piccola escursione lineare di 0, 3 nella direzione N. S. – In città sono caduti molti fumaiuoli in più di una località; sonosi manifestate lesioni verticali

nei muri ed in altri posti nella direzione di O–E, cresciuti i crepacci con distacco dell' intonaco ».

25 *Gennaio.*

« Alle 12, 39, 48 ant., t. m. di R., per una scossa di terremoto orizzontale, preceduta e seguìta da forte e cupo rombo, moltissimi si sono destati dal primo sonno, la quale scossa è stata indicata dal Sismoscopio Malvasia e dall'Avvisatore a mercurio del P. Bertelli nella direzione O-N. – Una seconda scossa pure, da moltissimi avvertita, è avvenuta alle 7.35 ant., prevalendo nel Sismoscopio Malvasia la direzione orizzontale di Ovest ad Est, ma mista al moto verticale in senso del sollevamento, per l'indicazione avuta dello spostamento di tre millimetri nel pendolo dell'Ortosismometro. – Osservato poi alle ore 0, 30 ant. l'Isosismometro, si è rilevato, che per le due scosse, gli aghi di questo istrumento si sono spostati nella direzione O–E di mill. 4,6; di ON–ES 3, 9; di SO–NE 3, 5, di N–S 2, 1. Il pendolo lungo metri 6,950 aveva lasciato una traccia ad O–N S–E lunga millim. 4, poi della forma quasi circolare; l'altro pendolo lungo metri 17,170, aveva lasciato traccia minore, cioè di mill. 2. – Nella seconda scossa delle 7,35 si è veduto un canarino nella sua gabbia dibattersi disperatamente. In fine alle ore 9, 30, 25 ant. una terza scossa è accaduta, da molti avvertita. Momenti prima il Tromometro era tranquillo; dopo subito la scossa, segnava una ampiezza lineare di 23,0 nella direzione OS–EN. – Le spie sismiche non hanno mai dato segno alcuno di commozione del suolo. – Si nota che il pendolo dell'Ortosismometro, oltre il tremolio del giorno 24 alle ore 11,21 ant., il giorno 25 segnava un tremolio forte alle 7,59 ed alle 8, 27 ant. ed ancora alle 12,18 pom., ma debole, e dopo gli apparati non hanno indicato agitazione sensibile, segnando alle ore 2 pom. 0, 1 ».

A. Malvasia.

Mercoledì 26 *Gennaio* 1881.

« Alle ore 10.05.28 pom. t. m. di R. in città da molte persone è stata avvertita una scossa orizzontale di terremoto, con scricchiolìo delle imposte ed ondulazione dei lampadari sospesi dall' alto. Immediatamente dopo la scossa il pendolo del Tromometro normale segnava un movimento dell'ampiezza lineare di 20 divisioni della scala. Dall'indicazione del sismoscopio Malvasia, si rileva che nella scossa prevaleva la direzione OE. – I due

pendoli lunghi essi pure segnavano la scossa nella stessa direzione. Il termometro esterno cent.° a sud segnava due gradi sotto zero; due ore prima ne segnava tre. Il barometro a 0 era a 756, 38. Il cielo nuvoloso, non spirava vento affatto, l'acqua nel pozzo non si era agitata. Alle 12 pom. l'Ortosismometro indicava una grande agitazione verticale. Il giorno 25 alle 10 pom. vi fu un accenno sismico, o distacco dell'ancora della sbarra orizzontale magnetizzata.

« In Bologna sino dal 22 corrente alle ore 2, 19 pom. il Tromometro incominciò ad indicare un' agitazione del suolo, non interrotta mai sino al principio dei terremoti, notando ancora che il giorno 23, alle ore 2, 15 pom. l'Ortosismometro indicava una forte agitazione verticale.

« Ci viene oggi riferito che il magnifico tempio di S. Luca presso la città, sul colle per le scosse di terremoto avvenute abbia grandemente sofferto e che nelle cupole sianvi fenditure ben larghe 20 centimetri.

« Leggiamo nei pubblici giornali che il terremoto del 24 oltre essere stato avvertito a Brisighella e a Castel S. Pietro come già si è notato, fu sentito a Firenze, a Parma, a Ferrara ed a Trieste ».

A. Malvasia.

Lo stesso Ch. Conte A. Malvasia ci ha fornito moltissime altre notizie da esso raccolte nella regione dell'Appennino fra Bologna e Firenze che per brevità debbo soltanto riassumere come segue:

24 *Gennaio, Brisighella* 5, 10. Lungo rombo continuato da lunga scossa ond. prima in un senso poi in un altro.

Castel S. Pietro. Forte scossa suss. ond. con molto rombo 6″ – 7″ altri dicono 40″. Nella notte altre tre leggerissime in direzione O-E.

Palazzuolo 4, 40 p. scossa ond. e suss. 5.30, altra leggera 6, 00 p. altra leggerissima.

Porretta 5, 00 p. scossa leggera avvertita appena da pochi.

Lojano 5 p. scossa forte con rombo avvertito in campagna afa straordinaria

Pergola di Campeggio, 5 p. Scossa forte che rovinò un casolare.

Sconello 5 p. Scossa con guasti nelle fabbriche.

Quaderna 5 p. Scossa forte e lunga quasi un minuto primo in direzione SE-NO preceduta da forte rombo. Gli oggetti sospesi oscillarono per mezza ora. Lesionata la chiesa. Il ghiaccio del vicino torrente ha screpolato con rumore. Alcuni avvertirono una seconda scossa. Alle 9, 35 pom. una terza

scossa, *mediocre-forte*. E-O preceduta da rombo. 9.50 quarta scossa appena sensibile e pur preceduta da rombo.

Guzzano. Scossa forte, caddero calcinacci e taluno fuggì.

Vertuno. Scossa forte che fece uscire il petrolio da un lume pendente.

25 *Gennaio*. Ometto le notizie dei vari luoghi di questo giorno e dei seguenti perchè hanno minore importanza e compariranno nel catalogo del Bullettino del Vulcanismo. Scendo alle notizie di Firenze forniteci dal Cecchi e dal Bertelli.

Osservatorio Ximeniano. — Firenze, 25 gennaio 1881.

« Mi faccio un pregio di darle notizia che nell'intervallo di poco più di quattordici ore abbiamo avuto due piccoli terremoti, uno ieri sera alle ore 5, minuti 3 e secondi 26, e l'altro questa mattina alle ore 5, minuti 53 e secondi 20; ambedue molto deboli e di brevissima durata. Quello di ieri sera fu avvertito da non poche persone, atteso il carattere delle scosse assai brusche. Consistè in una scossa ondulatoria da Nord-Est a Sud-Ovest, la quale fece tracciare dal mio sismografo un segno di millimetri 3 e mezzo sulla carta affumicata, la quale scossa fu seguita da una sussultoria, che fece fare all'istrumento una traccia di un millimetro e un terzo sull'altra carta affumicata.

« Il terremoto di questa mattina è stato soltanto ondulatorio da Est-Nord Est a Ovest-Sud-Ovest, ed ha tracciato un segno di un millimetro e mezzo sulla carta affumicata. Anche quest'ultimo terremoto è stato capace di dare lo scatto alla sveglia e di mettere in movimento l'orologio del mio sismografo, come fece anche il terremoto di iersera, lo che prova sempre più la delicatezza dello strumento medesimo. »

F. Cecchi della S. P.

Osservatorio Ximeniano 27 *Gennaio* 1821.

« Mi affretto a darle notizia che abbiamo avuto altre due piccole scosse di terremoto, una ieri sera alle ore 10, minuti 5 e secondi 52, e l' altra questa mattina alle ore 9 e minuti 36 circa; ambedue piccolissime, e per quanto so, da pochi avvertite. Ambedue però furono capaci di dare lo scatto alla sveglia dell'orologio del mio sismografo, e di far tracciare un segno sulla carta affumicata.

« La scossa di ieri sera fu soltanto ondulatoria, e fu da Nord-Est a Sud Ovest, producendo una traccia di un millimetro sul nero di fumo. Quella di stamane è stata soltanto sussultoria, ed ha prodotto sul nero di fumo una traccia di circa otto decimi di millimetro. È molto probabile che anche queste scosse siano venute a noi dai soliti centri, ossia, come dicono i sismologi, dal solito *radiante* sismico del territorio bolognese, ove le così dette azioni endogene non sembrano ancora quietate dopo il forte terremoto che avvenne colà il dì 24 del corrente mese ».

F. Cecchi, delle S. P.

« Chiarissimo Sig. Professore.

» Collegio della Quercia 25 Gennaio 1881.

» Le mando copia dell'articolo che spedisco ai giornali riguardo al terremoto, e gradirei che l'inserisse pure nel Bullettino.

» Ieri sera, 24 Gennaio, si ebbe qui una leggera, ma rapida scossa di terremoto, alle $5\frac{1}{2}$. Fu segnata a pian terreno dall'Isosismometro in direzione NO–SE, dì 1 millimetro e mezzo circa, ed all'ultimo piano dalla sveglia elettrica, e da altri pendoli, i quali lasciarono una traccia di 2 millimetri in direzione O.N.O. – E.S.E. – Questo movimento sismico pare che sia seguito qui, come suol dirsi, per consenso, cioè comunicato da qualche scossa lontana, giacchè i moti microscopici osservati nei due Tromometri due minuti prima soltanto, non indicavano, come altre volte, colle loro agitazioni il prossimo parossismo tellurico.

Questa mattina poi, 25 Gennaio ad ore 7,53 circa, si è avuta un'altra piccola scossa assai rapida ondulatoria ed anche un poco sussultoria, come chiaramente veniva indicata dal Tromometro. La direzione è stata E.–O. di 5 millimetri. Però non è stata indicata che dai pendoli leggeri e corti, seconda la nota legge scoperta dal nostro P. Cavalleri: la sveglia elettrica e l'orologio unito ne hanno dato l'avviso ed il Tromometro normale specialmente era in vivissima agitazione segnando 50 divisioni della scala. Questa scossa non può attribuirsi al vento, chè a quell'ora non aveva ancor preso forza, mentre al presente che scrivo, i pendoli si sono tranquillizzati non ostante che il vento sia energico. D'altra parte il pendolo tromometrico è a piano di terra e riparatissimo e non risentì nemmeno quel vento impetuoso del giorno 20 corrente che rovesciò il comignolo di un camino sul

tetto del collegio. In tal circostanza furono i pendoli all'ultimo piano, che si mossero di 2 millimetri in direzione del vento, e suonò pure la sveglia più volte, ma soltanto agli sbuffi più forti. È certo però che al presente noi siamo in periodo sismico, come hanno chiaramente indicato le oscillazioni verticali tromometriche, osservate nei giorni 3, 4, 5, 18, e fortissime alle 9,50 pom. del giorno 12 gennaio, oltre i moti orizzontali assai sensibili.

» Invece il terremoto del 24 Gennaio qui e in tutta questa collina Fiesolana, meno che al versante N.O. sotto Fiesole, non fu punto sentita non solo dalle persone, ma nemmeno dai più delicati pendoli qui al Collegio, ed al sismometro Cecchi al seminario di Fiesole. Pure nel piano sottoposto a noi verso Firenze la scossa fu benissimo avvertita da molti, anche a poca distanza di qui, come a S. Gervasio e sulle vie del piano di circonvallazione della città. Questo fatto singolare si è verificato molte volte pure in passato, e conferma luminosamente, quanto altre volte ho accennato, cioè che questo terreno alluvionale, più antico è discordante dal terreno quaternario, più recente della valle dell'Arno. Ed è da considerarsi come un *ponte* sismico secondo la frase degli Americani, cioè un nodo di vibrazione, per cui si sente relativamente assai meno il moto vibratorio del terremoto. Questo fenomeno avviene non soltanto alla superficie del suolo; ma, in America ed altrove, è stato ancora verificato nella profondità delle miniere; essendosi avute più volte delle scosse anche molto sensibili in un paese, non punto avvertite nelle gallerie delle miniere sottoposte e viceversa. Il fenomeno della polvere che sbalza da alcuni punti, per raccogliersi in altri nelle lamine vibranti di *Cladni*, secondo i ventri ed i nodi di vibrazione delle medesime, pare che renda sufficiente ragione del fatto sismico accennato, il quale a prima vista si direbbe strano e quasi incredibile ».

Firenze, Collegio alla Querce, 26 Gennaio 1881.

« D. Timoteo Bertelli B.ª »

Poichè altri terremoti assai simili a questi del 24-27 Gennajo urtarono la medesima regione, stimo opportuno riferire le notizie di questi altri prima di procedere a qualsiasi giudizio che potrà così essere complessivo.

Terremoti del 2, 4 e 14 Febbrajo in Bologna, Firenze, Trieste.

Trieste. Il Sig. Giulio Grablovitz pubblicò le seguenti notizie: « Il giorno 2, alle ore 7 ¹/₄ antimeridiane, vi fu una scossa ondulatoria, avvertita da parecchi; direzione non osservata.

« Il giorno 14, alle ore 2 22′ 27″ antimeridiane, vi fu altra scossa di terremoto sussultorio-ondulatorio, n. 4 a 5 (forte temolio di infissi, cristalli, scricchiolio d'impalcature, interruzione del sonno in $^5/_6$ delle persone interrogate). Direzione OSO–ENE.

« Primo impulso OSO. Qualcuno credette notare un rombo sotterraneo.

« Il primo urto fu violento e destò dal sonno lo scrivente, che immediatamente si pose a contare i secondi d'un orologio a pendolo, e dedusse con questo mezzo l' istante presunto del primo urto stesso, confrontandolo con un orologio esattamente confrontato colla giornaliera segnalazione meridiana, ed applicandovi tutte le correzioni opportune.

« Dopo il primo urto le scosse continuarono con minore intensità, ma senza interruzione; al 12° secondo altro gagliardo impulso, nell'egual direzione e sotto una forte inclinazione, fu quello che destò la generalità, la quale giudica la durata 6 secondi. Infatti al 18° secondo le scosse cessarono, e non rimaneva che un debole tremolio che durò pochi secondi.

« Barometro lentamente calante segnava 762 millimetri. Debole vento da NE; temperatura relativamente mite. Notte serena. Luogo d'osservazione metri 12 sopra il suolo, 14 sopra il livello del mare.

« Anche a Lubiana furono sentite violentissime scosse ».

Firenze. Il Bertelli scrisse dal Collegio alle Querce 2 febbraio 1881. Questa mattina alle 7 e 6 l'Avvisatore sismico e la sveglia elettrica hanno segnato una piccola scossa di terremoto principalmente sussultoria ma leggermente ancora ondulatoria in direzione N. O. $^1/_4$ S. E. Alle 8 e 30 il pendolo tromometrico indicava ancora un tremito sussultorio nel suolo.

« Il primo di questi moti sismici soltanto è stato avvertito qui da alcune persone, ma è molto probabile che tanto i moti di oggi quanto quelli di ieri mattina siano in relazione di qualche scossa maggiore avvenuta altrove. Ad ogni modo accennano essi al periodo sismico nel quale ci troviamo, come già dissi nella relazione delle scosse del 24 e 25 gennaio. Le scosse del 26 e 27 indicate dai delicatissimi strumenti del P. Cecchi all'Osservatorio Ximeniano qui non furono punto sentite dagli strumenti. Pel 27 si sa dai giornali che vi fu un forte terremoto a Berna nella Svizzera ».

Dal chiarissimo padre Cecchi delle Scuole Pie riceviamo sull'argomento di questo terremoto la seguente lettera:

Firenze, dall'Osservatorio Ximeniano, 3 febbraio 1881.

« Nella notte scorsa alle ore 1, minuti 4 e secondi 21 (tempo medio di Roma) vi è stata una scossa di terremoto da Nord-Nord-Est a Sud-Sud-Ovest, e quindi ne è venuta un'altra dopo circa due secondi. Dopo di che tutta la casa ha durato ad oscillare per circa altri tre secondi. Io me ne stava a quell'ora a sedere al mio tavolino in tutta quiete, e non ho avvertito la prima scossa, che è stata debolissima, ma ho sentito subito sonare la sveglia dell'orologio del mio sismografo situato nella stanza contigua.

« Ho però bene avvertito la seconda, che come ho accennato, ha fatto oscillare ben sensibilmente tutta la casa. Visitato l'istrumento, ho trovato sulla carta affumicata una traccia della lunghezza di 2 millimetri e mezzo nella direzione sopra indicata. Non ometto di dirle che anche il dì 1° del corrente mese alle ore 7 e minuti 10 antimeridiane avemmo un'altra scossa sismica, la quale, oltre ad aver fatto sonare al solito la sveglia del sismografo, fece tracciare dall'istrumento un segno di circa 3 millimetri sul nero di fumo nella medesima direzione, cioè da Nord-Nord-Est a Sud-Sud-Ovest.

« Probabilmente queste scosse, che avvengono ad epoche così vicine, vengono a noi dal solito focolare sismico del Bolognese, ove le azioni interne pare che seguitino ancora con una certa attività.

Firenze, dall'Osservatorio Ximeniano, 4 febbraio 1881.

« Le forze sismiche che hanno agitato non solo il territorio bolognese, ma anche quello della Romagna, non sembrano ancora cessate. Anche questa mattina abbiamo avuto una scossa ondulatoria da nord-ovest-1/4 nord a sud-est-1/4 est alle ore 4, minuti 37 e secondi 42, la quale è stata seguita da un'altra più debole nella direzione quasi di nord-est. Nel mio sismografo è avvenuto al solito lo scatto della sveglia, ed è stato messo in movimento l'orologio. La traccia segnata sul nero di fumo dalla prima scossa è stata di circa due millimetri e mezzo e l'altra assai minore. »

« F. Cecchi d. S. P. »

Riceviamo poi dal ch. P. Bertelli la seguente comunicazione sul medesimo fenomeno del 4:

Firenze, Collegio alla Querce 4 febbraio 1881.

« Questa mane, alle 4,36 ant. leggerissima rapida scossa sussultoria ed anche appena ondulatoria NO-SE.

« La scossa della mattina del giorno 2 corrente che le partecipai, è stata fortissima a Modigliana, ondulatoria in direzione N–S e della durata di circa 8″. A Forlì anche si ebbe forte questa medesima scossa.

D. Timoteo Bertelli.

Bologna. Dal Malvasia ricevetti comunicazione delle scosse del 2 e del 4 tanto di Bologna che dei molti altri luoghi delle vicine colline, dalle quali risulta che Bologna fu meno fortemente urtata che ai 24–25 Gennaio quantunque la regione generale della scossa fosse la medesima che ai 24 Gennajo. Vedremo poi le cagioni di tali anomalie. Intanto basti notare che la scossa del 2 fu fortissima a Modigliana, Forlì, Russi, Brisighella, etc., estendendosi sensibilissima fino a Ravenna. È da notare che nei giorni nei quali non avvennero scosse fortissime come il 2, il 4 ed il 14 le scosse minori furono frequentissime, ed in taluni luoghi dell'alto Appennino decisamente continue. Per esempio a Lojano dal 24 Gennaio al 4 Febbraio non vi furono meno di cinque scosse ogni giorno. In pari tempo qua e là avvenivano tremiti di suolo nella Romagna e nelle regioni circonvicine come si vedrà nei catalogi sinottici da pubblicarsi nel *Bullettino del Vulcanismo italiano*. Laonde non è da credere che dal 4 al 14 Febbraio il tempo passasse tranquillo. Le corrispondenze che ora soggiungo accennano alcuni momenti culminanti di movimento terrestre durante il detto intervallo fra le scosse maggiori.

Firenze, Collegio alla Querce 10 Febraio 1881. – « Nella notte scorsa, alle 2,58 e 45 secondi ant. circa, l'Avvisatore sismico ha fatto sonare la sveglia, e gli istrumenti, tanto al pian terreno che all' ultimo piano, hanno indicato una piccolissima scossa vibratoria, risentita però principalmente dai pendoli corti e dalle spirali brevi.

« Gli indici spostati nell'Isosismometro indicavano un movimento unilaterale nella direzione SE¹|4 SSE, e la stessa direzione presentava la traccia del pendolo all'ultimo piano: questa traccia eccentrica aveva la forma di un *C* con un piccolo dentello sporgente nel mezzo della curva. Probabilmente il moto sussultorio predominante è stato accompagnato, come qualche altra volta pure ho notato negli anni scorsi, da una passeggera e lenta depressione del suolo verso l'asse della valle del Mugnone. La scossa è stata avvertita come principalmente sussultoria da parecchie persone del Collegio, specialmente ai piani più bassi, e ciò contro quanto più d'ordinario suole avvenire nei moti meno rapidi, giacchè in tal caso i muri oscillano

in seguito come leve o pendoli rovesci, essendovi allora il tempo necessario alla comunicazione del moto. È probabile che anche questa scossa provenga da uno dei due centri di scuotimento della catena Appenninica, di questo lungo periodo sismico che traversiamo. Questi centri sarebbero (a quanto finora si può arguire dalle notizie raccolte) Loiano per le scosse di gennaio, e per quelle di febbraio, Modigliana e Brisighella. Il Tromometro seguita ancora a dare qualche segno di moto verticale, e questo è caratteristico delle agitazioni sismiche. Altra piccola scossa la sera dell' 11 Feb. alle 8.32.'20'' p. »

« D. Timoteo Bertelli B.ª »

Frana sulla ferrovia Udine–Pontebba. – Leggesi nella *Patria del Friuli.*

« Nella notte dal 9 al 10 corrente, a 200 metri dal Casello 62 verso Pontebba, un masso abbastanza voluminoso staccavasi da un picco a destra della ferrovia e cadendo su questa guastava 3 rotaie dell'armamento e saltuariamente il muro di parapetto a valle, ed ingombrava la carriera stradale.

« Dopo quattro ore di lavoro, dalle 5 alle 9 ant. del 10, la ferrovia era perfettamente ristabilita in modo, che il treno 30 (diretto per Vienna) potè transitarvi senza patire il minimo ritardo.

Bologna. Dall'Osservatorio dell'Università si comunica ai giornali in data 14 Febbraio:

« Alle ore 10, minuti 44 e secondi 55 pom. del giorno 13 corrente fu avvertita una piccola scossa di terremoto, ondulatoria per 4 secondi nella direzione prossima alla linea meridiana.

« Alle ore 9, minuti 50 e secondi 34 antimeridiane di questo giorno (14) è accaduta una forte scossa di terremoto, preceduta da rombo, dapprima sussultoria per un istante, poscia ondulatoria per due secondi nella direzione di levante a ponente. Quindi di nuovo sussultoria e dipoi ondulatoria per altri 3 secondi nella direzione da settentrione a mezzodì. »

Dal Gabinetto Tromosismico di Bologna fondato e diretto dal C. Malvasia, questi scrive:

« Oggi 14 Febbraio 1881 alle ore 9.50.30 ant: t. m. di R. in città una forte scossa di terremoto ondulatoria ed anche alquanto sussultoria con lieve rombo è stata avvertita ed ha recato sbigottimento.

« Nel Gabinetto Tromosismico gli indici dell'Isosismometro hanno segnata la scossa orizzontale nella direzione NO–SE di mill: 14.4; nella direzione

N-S di 11.7 e nella direzione SO-NE di 10.1. Il pendolo della lunghezza di metri 13,84 ha lasciato una traccia elissoide nel senso dell'asse maggiore NO-SE di mill: 4 con una linea tangente all'asse suddetta di mill. 8.

« Il pendolo della lunghezza di m: 6,930 una simile ellisse, con la linea nella stessa direzione, ma di mill. 6. Nell'Avvisatore a mercurio del P. Bertelli sono discese le palline nell'ordine seguente, la prima a S-O; la seconda a S-E; la terza a S; la quarta ad O. Il pendolo leggero a triangolo del P. Cecchi ha lasciato una traccia sopra la carta fumicata informe, prevalendo la direzione NO-SE poi si è capovolto. Nell'Ortosismometro l'indice superiore si è smosso di mill. 3, l'inferiore di mill. 1 $\frac{1}{2}$; quindi la scossa è stata ancora anche verticale nel senso di abbassamento, maggiore dell'innalzamento del suolo. Il livello dell'acqua nel pozzo si è di un tratto abbassato di mill. 4 poi ritornato immediatamente al livello di prima, e passati pochi minuti si è alzato di tre mill: ma non di un colpo, poi ritornato al livello che trovavasi prima della scossa. L'abbassamento del barometro fatto a 740,0 a O incominciò l'11 alle 7.40 o colla media 739,5; il giorno 12, 743,9; ed il giorno 13, 755,0. Non si ritiene poi siasi ribassata la colonna barometrica per la scossa di oggi, avendo sempre oscillato fra 756,33 e 757,60. Sino al presente ore 2.34 pom. Il Tromometro nell'osservazione antecedente alla scossa (7.23 a.), era quasi fermo, segnava un moto lievissimo circolare di 0,3, l'Ortosismometro indicava un leggero movimento verticale; in questo mese poi solamente nelli giorni 12. 13. e 14 l'Ortosismometro non ha mostrato tremiti.

« Si avverte che la scossa principale è stata preceduta da una piccola (a 9. 50 27.) per la quale l'orologio si è arrestato, e la sveglia ha suonato. La direzione di questa piccola scossa, come risulta dall'Avvisatore Bertelli e dal Sismoscopio Malvasia, che sono in diretta comunicazione coll'orologio, è stata nella direzione da SO-NE. Si ritiene poi che gli altri istrumenti abbiano segnato solamente per la seconda forte scossa delle 9. 50. 30 a. Così si spiega come diverse macchine non abbiano segnate tutte la medesima direzione. Il cielo era sereno, non spirava vento nè prima nè dopo.

« Nell'appartamento sopra al Gabinetto tromosismico di 5 orologi col pendolo corto se ne sono fermati 3 uno posto nella direzione NNE-SSO, l'altro SO-NE ed il terzo NE-SO, li due poi nella direzione SO-NE e SE-NO non si sono fermati. Gli orologi con li pendoli lunghi hanno continuato il loro cammino. Ha suonato la campana dell'orologio pubblico ed i campanelli nelle case. Molti fumajuoli sono caduti. Nella Chiesa parrocchiale di S. M. Mag-

giore a NNE della Città nel muro laterale ad O–N sono aumentate d'assai le screpolature che da tempo esistevano e nella seconda cappella a sinistra è caduta una mensola; quasi di faccia alla suddetta Chiesa nello stabilimento dell'Immacolata nove fumajuoli sono caduti in più di una direzione.

« In questo stesso giorno abbiamo registrato oltre alle due scosse già esposte, altre quattro alcune appena avvertite. Alle 10.29a prevalendo la direzione EO; alle 12. 39.40 p; alle 1.39.34 ed alle 2.22.25 prevalendo in queste la direzione N–S e tutte indicate dal Sismoscopio.

« Giungendoci importanti notizie dai nostri corrispondenti sui terremoti di oggi, non mancheremo darne succinti ragguagli. »

Firenze, dal Collegio alla Querce in data 14 Febbraio scrive il Bertelli:

« Questa mattina alle ore 9 50, 58″ circa (t. m. di Roma) abbiamo avuto una nuova scossa debole e lenta, sentita soltanto da poche persone. Essa è stata principalmente ondulatoria, della durata di 4″ o 5″ somigliante ad un barcollamento di una nave. Dal confronto delle ampiezze d'oscillazione dei diversi pendoli a pianterreno ho dedotto che ciascuna oscillazione aveva probabilmente la durata 1″ 1/4 circa, conforme alla legge scoperta già dal nostro P. Cavalleri: infatti mentre la scossa aveva prodotto nel Tromometro normale (pendolo lungo 1 m., 50) un moto nella ampiezza di 10 millimetri, negli altri invece il medesimo non è stato che assai minore. Il moto orizontale principale è stato qui NNO–SSE, tuttavia come si vedeva dagli strumenti stessi è stato anche un pò di moto verticale, e questo poi si è ripetuto più volte nel giorno fino al presente.

« Colgo pure quest'occasione per comunicarle che la sera dell'11 corr. alle 8 33′ 20″ circa (t. m. di Roma) vi fu un piccolissimo moto sussultorio. I pendoli tromometrici furono tutto il giorno agitati e pochi secondi prima della scossa si manifestava pure in essi una vibrazione verticale. Ripeto ancora che questa circostanza è caratteristica per lo più del moto sismico e di ciò mi accorsi da prima del 1873 e fu sempre da me osservato d'allora in poi ed anche dal signor conte Malvasia Antonio a Bologna sul mio Tromo–sismometro che dal 1874 in poi con molta diligenza viene osservando. Intanto si sa che le scosse in Romagna si vanno ripetendo qua e là quasi giornalmente. »

« D. Timoteo Bertelli, *barnabita* »

Dall'Osservatorio Ximeniano pure ai 14 Febbraio aggiunge il Cecchi:

« Questa mattina alle ore 9, minuti 50 e secondi 49, abbiamo avuta una debole scossa di terremoto ondulatoria nella direzione da nord-ovest a sud-est, la quale ha fatto scaricare la sveglia dell'orologio del sismografo e messo in movimento l'orologio medesimo, che, come è noto, se ne stava fermo con le lancette sulle ore XII.

« Il segno tracciato sulla carta affumicata è stato di due millimetri e mezzo di lunghezza. Il pendolo di questo sismografo è lungo circa due metri, e porta un peso di piombo di undici chilogrammi. Un altro pendolo situato in un'altra stanza e lungo metri 6 50 con un peso in basso di tre chilogrammi, ha tracciato un segno di un millimetro e tre quarti. È noto che pendoli di lunghezza differente possono dare tracce di differente lunghezza secondo che le scosse sono più o meno brusche. I pendoli corti sono scagliati dalle scosse brusche e i segni tracciati sul nero di fumo sono più lunghi. Questa mattina ho trovato un segno di tre millimetri di lunghezza fatto da pendolo cortissimo, la cui lunghezza non è che circa sei centimetri. »

« F. Cecchi d. S. P. »

Verona. Mi credo in dovere di riferire anche le due seguenti lettere del Goiran che dimostrano l'estensione dei movimenti che può essere accertata dalle osservazioni assidue sugli istrumenti.

Verona 14 Febbraio

« Anche qui nel veronese si è manifestato un massimo di scosse nei giorni 24 e 25 gennaio p. p., che dura tuttora. Nel corrente febbraio il mio microsismografo ha segnato scosse leggere nei giorni 2, 3, 4, 8, 11. Una leggera scossa si è avuta alla mezzanotte del giorno 13. Questa mattina poi un pò prima delle ore 9 ant. tutti i pendoli erano agitatissimi. Il mio microtelefono dava suoni dapprima intermittenti e radi: alle ore 9 il suono divenne più intenso, continuo e durò per alcuni minuti. Un pò dopo le ore 10 ant. si ebbe un leggero movimento ondulatorio nella direzione SSE-NNO; uno dei miei pendoli sismoscopici segnò sul nerofumo una traccia di circa un millimetro e mezzo. Alle ore 1, 30 pom. nuovi rumori al microtelefono. »

Verona 15 Febbraio

« Continua la agitazione sismica. I moti microsismici sono stati continui nella giornata di ieri ed oggi.

« Oggi il microsismografo ha segnato una scossa sussultoria leggerissima alle ore 10 minuti 15 ant. Movimenti ondulatori debolissimi nella direzione approssimativamente da SSE a NNO sono avvenuti ripetutamente dalle ore 12 meridiane sin dopo la 1 pom.

« Osservo che nei giorni 13 e 14 è stata fortemente colpita Bologna. Ieri 14, alle ore 9 minuti 50 e secondi 34 ant. in questa ultima città si ebbe forte scossa dapprima sussultoria e poscia ondulatoria nella direzione da levante a ponente per un 2 secondi: quindi di nuovo sussultoria e di poi ondulatoria per altri tre secondi nella direzione da settentrione a mezzogiorno. Il moto microsismico veronese da me segnalato verso le ore 9 ant. di ieri, precedette adunque e preannunziò il forte terremoto di Bologna.

A. Goiran. »

Quantunque non sieno numerose le notizie raccolte sui terremoti dal 24 gennaio al 14 febbraio pure è abbastanza chiaro dall'insieme di esse che nella regione frapposta tra Firenze e Bologna è stato il centro di diffusione di tutta quella scossa. Talune di esse si comunicarono lungi fino a Trieste come quella del 2 e del 14 febbraio, anzi questa seconda giunse fino a Roma. In generale però questi terremoti non oltrepassarono i confini dell'Emilia e delle vicine terre della Marca nel versante adriatico dell'Appennino, e le vicinanze di Firenze nel versante mediterraneo. Esaminando poi la intensità delle scosse e postala in ordine topografico, noi vediamo che in ciascun terremoto risulta una linea di massima intensità coincidente con una o due delle vallate fluviali discendenti dall'Appennino toscano verso l'Adriatico. Così la scossa del 24 gennaio e del 14 febbraio si identificano del tutto e seguono l'asse della Valle del Idice, del Laveno e del Reno; quella poi del 2 e del 4 febbraio seguono principalmente le valli del Marzeno e del Lamone. Poichè tutte queste scosse poi giunsero a Firenze ed a Bologna quasi contemporaneamente, e più tardi a Trieste ed altrove, è necessario riconoscere che il punto di partenza delle onde sismiche era in un punto intermedio fra Firenze e Bologna. Infatti quantunque non sia da far grande conto della esattezza delle ore riferite dai paesi delle montagne, pure non è senza importanza il vedere la generale tendenza ad indicare ore più basse delle

verificate dagli osservatori di Bologna e di Firenze. È pure notevole che talvolta l'ora di Firenze dove le scosse furono mai sempre deboli è alquanto più bassa dell'ora di Bologna dove le scosse furono più forti. Ciò indicherebbe che Firenze era più prossima per linea al centro delle scosse ma meno disposto il suolo intermedio a trasmettere le onde sismiche. Infatti se come i dati ci additano noi riconosciamo il centro o radiante della scossa nella giogaia centrale dell'Appennino sulla linea del *Monte della scoperta* e del *Monte Guercino* noi troviamo le valli fluviali suddette quasi rettilineari e parallele discendenti verso l'Adriatico mentre dalla parte di Firenze troveremo le valli frastagliate e non nettamente lineari. In una parola i terremoti di questo periodo hanno riprodotto in piccolo il terremoto del 7 ottobre 1874 e dimostrato ancora una volta che l'apparato sismico per la trasmissione delle scosse sta nelle fratture del suolo e che i centri di attività o radianti di prim'ordine risiedono principalmente sotto i grandi rilievi degli assi maggiori delle catene montuose.

Terremoto di Calabria, Piemonte e Casamicciola con conato eruttivo del Vesuvio dal 2 al 4 Marzo 1881.

Se si fosse meglio informati dei fatti avvenuti in Italia in questo periodo del 2 e 4 marzo è indubitato che la scienza vi profitterebbe moltissimo per scoprire le relazioni esistenti fra i centri diversi dell'attività endogena. La sera del 2 alle 10 un forte terremoto avvenne nelle Calabrie. Esso fu forte senza danni a Castrovillari, assai sensibile a Cosenza e provincia. Questi due punti già accennano ad un noto radiante sismico parallelo ai monti il cui asse varia dal S al N. Dai giornali apprendiamo che alla medesima ora una fortissima scossa avvenne a *Rossano Veneto*. Evidentemente è questo un equivoco per Rossano di Calabria, il quale punto sul mare però estende di molto l'area di forte scuotimento della sera del 2 marzo, e mostra l'importanza di questo poco conosciuto terremoto. In fatti con esso quasi coincideva un riscaldamento sensibile delle acque in Casamicciola ed un risveglio del Vesuvio le cui lave alle 4 pom. discesero improvvisamente fino alla base del cono all'atrio del Cavallo.

Intanto ad Ornavasso ed Occhieppo inferiore nel Piemonte all'1 pom. e poi circa all'ora stessa dell'emissione di lava al Vesuvio un terremoto preludeva all'estesissimo italo elvetico che sopraggiungeva poi circa 12 ore dopo alle 3,55 ant. del giorno 3 marzo. Questo terremoto analizzato e descrittoci dal Denza, fu identico topograficamente a quello del 4 luglio 1880,

e come quello precedette le scosse dell'Isola d'Ischia. Tutti ricordano poi la catastrofe di Casamicciola all'1,05 pom. del 4 marzo 1881. Non debbo analizzare questo fatto al quale consacrai una speciale pubblicazione (1) Ricorderò solo che esso quantunque localizzato nell'isola d'Ischia e Casamicciola si rese insensibile perfino agli istrumenti in Napoli e fu da questi indicato in Roma ed a Bologna.

Concludo questa relazione sul massimo sismico del 2–4 marzo 1881 colle relazioni inviateci dal Denza sul terremoto Italo-elvetico del 3 al mattino.

« Moncalieri 5 marzo 1881.

« Dalle notizie giuntemi sino ad oggi risulta che il terremoto che ho annunziato ieri l'altro ha avuto press' a poco nel versante italiano la stessa estensione di quello del 4 luglio dello scorso anno 1880; di cui uno studio speciale è stato pubblicato nel N. 9 del Vol. XV del Bollettino meteorogico di questo nostro Osservatorio.

Infatti il movimento del suolo di ieri l'altro si è esteso sul Lago Maggiore, su tutta la valle dell'Ossola, nell'intera Valsesia, nell'alto Vercellese nel Biellese, nel Canavese e nella valle d'Aosta.

Ecco i luoghi da cui mi furono favorite notizie sino a quest'oggi, 5 marzo:

Lago Maggiore. – Cannobio, Castelletto-Ticino, Gozzano.

Val d'Ossola. – Varzo (Valvedre), Ornavasso.

Alto Vercellese. – Postua, Roazio.

Valsesia. – Riva, Mollia, Varallo, Serravalle.

Biellese. – Montasinari, Sordevole, Pollone, Oropa, Biella, Coggiola, Crevacuore, Pettinengo, Graglia.

Canavese. – Ivrea, Borgofranco, Vestignè, Vistrorio, S. Giovanni.

Val d'Aosta. – Aosta, Pont St-Martin.

La scossa di cui parlo, almeno da quanto si può rilevare sinora, non solo si è propagata, come nel 4 luglio, al nord del Lago Maggiore, ma si è sentita con forza eziandio verso il sud, secondochè risulta da accurate relazioni pervenutemi da Castelletto-Ticino, paese posto là dove il Lago ha suo termine e da Gozzano; e facilmente si sarà sentito anche più oltre, Dall'altro lato essa è penetrata ancora più al sud di quella del 4 luglio, giacchè fu avvertita, comecchè leggermente, allo sbocco delle valli della Stura, di Lanzo, come mi viene annunziato con molta precisione dal direttore dell'Osservatorio di recente stabilito presso quel collegio de' Salesiani.

(1) Bull. della Soc. Geografica Italiana Marzo 1885. Bull. del Vulcanismo Italiano Anno VIII, pag. 1.

« La concitazione del suolo fu più intensa nella valle d'Aosta, nell'alta Valsesia, ed in diversi luoghi del Biellese, nonchè a Castelletto-Ticino; leggiera altrove.

« Il movimento fu ondulatorio, diretto prossimamente da nord a sud nella maggior parte dei luoghi, predominando in altri la direzione NE-SW.

« Nella Valsesia, ed in diversi luoghi del Biellese, la prima scossa ondulatoria fu immediatamente seguìta da un' altra sussultoria. In questi luoghi si udì forte rombo.

« La durata fu diversamente apprezzata dai diversi Osservatori; essa oscilla da 4 a 12 secondi.

« L'ora in cui avvenne il fenomeno è compresa tra 3 ore 55 min. e 4 ore del mattino del 3, tempo medio di Roma.

« All'Osservatorio di Ornavasso, l'unico luogo in cui si trovasse un sismografo, venne assegnato per primo istante della scossa 3 ore 55 minuti.

« Il direttore dello stesso Osservatorio di Ornavasso mi annunzia che un'altra leggiera scossa ondulatoria da est ad ovest, e della durata di 3 a 4 secondi, fu avvertita alle ore 3 minuti 38 pom. del giorno precedente, 2 marzo.

« Un'altra scossa sarebbe pure avvenuta alle 2 $\frac{1}{2}$ della stessa mattina del 3 a Castelletto-Ticino.

« È questa la terza convulsione sismica avvenuta in Piemonte nel corrente anno 1881.

« Dal Bollettino internazionale di Parigi rilevo che la scossa del mattino del 3 marzo si ebbe pure a Belfort al NO del Giura. Questa circostanza fa sospettare che il movimento deve essere avvenuto forse anche nella Svizzera, come nel luglio 1880.

« Un disastroso terremoto è accaduto al pomeriggio di ieri a Casamicciola, nell'isola d'Ischia, presso Napoli.

« Moncalieri, 6 marzo 1881.

« Le mie induzioni accennate nella lettera indirizzatale ieri sono conformi al vero. Il prof. Soret, presidente della Commissione svizzera per lo studio dei terremoti, mi scrive che la scossa del 3 fu sentita nella Svizzera alle 3 ore e mezzo del mattino in tempo medio di Ginevra, che corrisponde appunto a 3 ore 55 minuti in tempo medio di Roma, come sul versante italiano.

« Nel tempo stesso ricevo annunzio dal dottor Conti, direttore dell'Osservatorio di Cosenza, che il giorno antecedente, 2 marzo, alle ore 9 minuti

55 pom., si sentì colà una leggiera scossa da Sud-Ovest, della durata di 2 secondi. Essa fu forte più al Nord, a Castrovillari ed altrove.

« Adunque il suolo italiano fu nei giorni passati sconvolto da un capo all' altro delle nostre terre. La commozione cominciò il 2 nell'estremo Appennino, dirigendosi verso Nord, continuò il 3 intorno alle più alte regioni delle Alpi, urtando contro l'angolo che la cerchia alpina fa al Nord-Ovest, e dirigendosi verso Sud. Terminò nel mezzo dell'Italia peninsulare, percotendo con impeto disastroso l'isola che termina al Nord l'incantevole golfo di Napoli.

« Hanno codesti fatti un legame che insieme li annodi ? Ecco ciò che la scienza anela conoscere, ma che finora non sa affermare sicura, non ostante i nobili sforzi de'molti suoi cultori.

P. F. Denza. »

Sembrami meritevole di ricordo quest'altra notizia che rilevo dai giornali:

« Erasi sparsa la voce che in seguito al terremoto del 3 marzo nella valle d'Aosta, la famosa fontana di Courmayeur, detta la *Vittoria*, avea raddoppiato il suo volume ed acquistato nuove forze gazose; ma si stentava a prestarci fede. Sembra oggidì che la cosa sia verissima e che l'accennato cambiamento siasi constatato fin dal 4 marzo ».

« Nulla di simile vien segnalato circa le fontane *Saxe* e della *Margherita*. Così la *Feuille d'Aoste* ».

Massimo sismico umbro del giorno 11-12 *Marzo* 1881.

Fra il pomeriggio dell'11 ed il mattino del 12 circa 19 scosse spaventarono le popolazioni di Fuligno Terni e Rieti. Molti terremoti si sentirono anche ad Aquila e Teramo negli Abbruzzi. Mancarono però numerose notizie sulle quali poter istituire col nuovo metodo una buona analisi topografica. Soggiungo l'unica relazione scientifica. che ho potuto ottenere del fenomeno proveniente dal Prof. Arpago Ricci di Spoleto e qualche altro dato desunto dai giornali dai quali risulta che anche a Palermo ed all'Etna questo massimo ebbe un eco come dai catalogi dai fenomeni ognuno potrà vedere che avvenne anche per i moti del 14 Febbraio antecedente.

Ma poichè questi terremoti incominciarono nel pomeriggio dell'11 Marzo facendosi sentire anche in Roma ed io potei trovarmi pronto nel mio gabinetto all'osservazione specialmente del microfono, ne ragionai già nella seduta accademica del 20 Marzo. Quindi nel fascicolo di quella sessione fu

pubblicato un sufficiente riassunto della mia comunicazione nel quale si descrive come per mezzo del microfono io potei seguire le fasi del fenomeno ed udire il progresso delle onde sismiche che si succedevano ritmicamente circa una a minuto secondo. Ecco poi la citata relazione del Professor Ricci.

« Spoleto, 15 Marzo 1881.

« Anche quest'anno digià abbiamo avuto un periodo sismico, che, sebbene breve, ha destato un pò d'allarme. I principali terremoti sentiti qui sono stati i seguenti:

Data	Direzione	Durata	Intensità	Ora	Quantità	Osservazioni
4 Mars	?	1″ a 2″	2° a 3° g	2,10′p.	ond°	Il tempo, or nuvoloso
7 »	OON-EES	1″ a 2″	3° g.	2,30′p.	ond°	ora sereno, fu sempre
8 »	idem	2″ a 3″	5° g.	10,46′a.	ond° poi suss°	variabile con caldo ec-
9 »	?	1″	2° g.	2a.	ond°	cessivo per la stagione.
11 »	OON-EES	2″ a 3″	3° g.	11,15′a.	ond°	
» »	idem	1″ a 2″	8° g.	0,30′p.	ond°	A Foligno sentite molto.
» »	idem	3″ a 4″	5° g.	4,55′p.	ond° rinforzato	Sentiti di più a Foli-
» »	idem	1″ a 2″	4° g.	8,48′p.	ond°	gno, Trevi, Castel Re-
» »	idem	1″ a 2″	3° g.	9,29′p.	ond°	taldi, Campello, forse
» »	idem	1″ a 2″	3° g.	9,52′p.	ond°	meno ad Assisi, Peru-
» »	idem	5″ a 6″	5° a 6° g.	11,50′p.	ond° ripetuto	gia, Todi, e quello
12 »	idem	3″	6° g.	3″	ond. sus°	delle 4,55′ sentito an-
» »	idem	2″ a 3″	3° g.	3,54p.	ond°	che a Terni.

« È d'avvertire che dal pomeriggio degli 11, sino alle 7 od 8 a. del dì veniente, si ebbe un quasi continuo tremolio del suolo, che, come altrove, poteva far valutare a qualche diecina di scosse di 1° e 2° grado (scala sua) quelle che si seguirono tra le più forti or ora segnalate. La direzione, quasi costantemente di OON-EES, era di circa 15° nel quadrante da O a N, e la provenienza sembra indubbiamente essere stata quella di OON; e poichè le terre che da Spoleto si distendono sino a Perugia furono tutte più o meno sommosse ma più intensamente pendii laterali della vallata spoletina, così opinerei che il luogo d'origine di tutti questi movimenti sismici di poco si discosta se da quello dei terremoti umbri del settembre 1878. Del resto, salvo un po' di spavento, aumentato dal suonare di campanelli, dal cadere di calcinacci, dall'allargarsi di fenditure nei muri, e lungi da Spoleto dal cadere di comignolo, nulla d'infausto vi fu.

« Ed ora una dimanda a Lei: che giudizio fa Ella dell'appendice sui ter-

remoti pubblicata non ha guari dal P. Bombicci nel *Corriere dell'Emilia*? A me dà a pensare tanto più in quanto che a pochi Chilometri di distanza da Spoleto digià si coltivano due miniere di lignite, l'una ad OON sulle argille mio-plioceniche, più abbondante, l'altra a NE in quel di Campello, e nei calcari secondari del lias. »

· A. Ricci. »

Dai giornali poi rileviamo che il giorno 11 a Rieti ebbero luogo due lievi scosse di terremoto. Nella notte seguente le scosse si sono replicate per ben quattro volte con l'intervallo di circa due ore. L'ultima scossa e stata terribile: ha fatto suonare l'orologio di città ed ha aperto una voragine sulla riva del lago Potenziani vicino alla città; l'acqua vi si riversa con immenso rumore e la superficie del lago si è abbassata di parecchi centimetri.

Parimenti pure da Palermo si scrive ai giornali con data non precisa ma che deve appartenere più o meno ai giorni medesimi.

« Sul basso versante orientale dell'Etna specialmente nelle campagne di Bongiardo e Mangano, il suolo fu a brevi intervalli (di 15 a 20 minuti) agitato da ripetute scosse ondulatorie. Si contarono in numero di dodici quelle più forti e capaci d'incutere paura.

« La popolazione del paese di Bongiardo, più suscettibile per i gravi disastri sofferti in conseguenza dei terremoti ivi accaduti nel giugno 1878 all' epoca dell' eruzione Etnea, lasciò la notte le proprie abitazioni per attendere all'aperto il ritorno della calma. »

Terremoto di Scio del 3 Aprile 1881 ed eco del medesimo in Italia.

Fino dal 30 Marzo l' agitazione microsismica in tutta Italia avea prese proporzioni evidentemente preludenti ad una grandiosa manifestazione d'attività tellurica. Quella agitazione aumentò per tre giorni continui mostrandosi maggiore nei vulcani spenti e nell'Italia meridionale; diminuì alquanto nel giorno 2 Aprile e scomparve del tutto nel 3 ossia nel giorno della catastrofe di Scio. Narrano i giornali che in questo giorno verso le 2 pom. avvennero a Scio le prime scosse spaventose. Esse si propagarono fino a Tchezmè sulla costa dell'Asia minore da cui l'isola di Scio è separata per un braccio di mare largo sette chilometri. Fino alle 6 pom. le scosse si moltiplicarono e divennero sempre più forti: l'ultima fu formidabile, e

gettò a terra tutte le case della capitale dell'isola e della maggior parte dei villaggi. In pari tempo il più gran numero degli edifici di Tchezmè crollarono con fracasso, da quel momento le scosse continuarono a succedersi con una rapidità terribile. Gli abitanti hanno dovuto abbandonare le città ed i villaggi, cosicchè circa 40,000 persone errarono qua e là all'aria aperta. Le vittime sembrano ascendere a circa 16,000. In alcuni luoghi si rimase senza acqua per l'arresto avvenuto delle sorgenti, già scarse nell'isola, in seguito al terremoto. Le scosse hanno continuato con somma frequenza fino al Martedì 5 Aprile contandosi in tre giorni più che 250 scosse generalmente ondulatorie e dirette dall'E all'O.

Sopra tutto un cupo rombo quasi continuo aumentò lo spavento fino al 6 Aprile.

Ho detto da principio che le osservazioni microsismiche in Italia rivelarono una agitazione che precedette il terremoto di Scio e cessò nel giorno di quella catastrofe. Le onde sismiche poi di quella scossa giunsero fino in Italia quantunque in forma insensibile. In Roma il mio microsismografo registrò un agitazione forte improvvisa ed isolata per lo spazio di un' ora che tenuto conto della differenza di meridiano cominciò circa 10 minuti dopo la scossa di Scio. Dunque circa 10 minuti impiegarono le onde sismiche da Scio a Roma. Nell'osservatorio di Velletri il Galli guardò il tromometro intorno all'una ad un quarto dopo mezzodì del t. medio di Roma, cioè poco dopo avvenuto il terremoto a Scio e vi trovò una oscillazione di 13 divisioni. A Bologna il Malvasia all'1,30 pom. trovò il tromometro normale agitato assai mediocremente mentre un pendolo lungo 13 metri avea lasciata una traccia di oscillazione in direzione NE-SO in ellissi il cui asse maggiore era lungo 22 mm. Esso ne percorreva ancora 7 in 8. Lo stesso Malvasia verificò esservi qualche tremito sussultorio e nel pozzo assersi ribassato il livello dell'acqua per 4 mm.

In Verona fu notata dal Goiran una calma assoluta negli istrumenti.

In Parma il microfono sismico da poco posto in azione dal Prof. Pigorini diede suoni assai straordinari di soffi, sibili e rullio di tamburro.

Le osservazioni al microfono però diedero a me in Roma ampio pascolo allo studio nel corso del 2 Aprile e nei successivi giorni. I rumori microfonici sembravano rivelare i continuati rombi di cui si parlava nelle notizie di Scio. Non si conoscevano allora in Roma tali notizie ed io registrava dalla domenica 3 al mercoldì 6 e specialmente per questo giorno

che il microfono sismico rivelava un rombo continuato e tanto grave che somigliava ad un continuo mugito di bue.

In quel medesimo giorno 3 Aprile un esteso ma leggero terremoto vi fu in Italia alle 5 ant. circa. Esso agitò le Marche, ed il Viterbese col centro di azione in Caprarola. Altri piccoli moti sismici si ebbero a Lesina nel Gargano. Il Vesuvio diede lave nel 2 e nel 3 Aprile e quasi mai più nel corso di quattro mesi; esso aprì anche grande numero di fumarole esterne a cento metri dal cratere. I terremoti a Scio continuarono scemando nel tempo successivo ma ripresero qualche forza e cagionarono nuovi danni nel giorno 11 e poscia ai 21 Maggio ed agli 11 Giugno. Tanto nell'11 Aprile quanto ai 21 Maggio il Vesuvio corrispose ai moti di Scio aumentando la propria attività.

Terremoto di Paola, Reggio Calabria, Messina
del 27 *Aprile* 1881.

Un altro vasto terremoto avvenne fra la Calabria e la Sicilia ai 27 Aprile alle 11,50 della sera. Assai interessante sarebbe stato l'analizzarlo perchè sembra non aver valicato i monti essendo stato forte a Paola e non avvertito a Cosenza. Fu forte a Polistene a Monteleone ed a Gioia Tauro specialmente. Quivi fu congiunto con una burrasca atmosferica. Dopo questo punto fu pure piuttosto forte a Reggio C. e più leggero a Messina. Quindi malgrado la grande scarsezza di notizie si può dire con quasi certezza che questo terremoto si diffuse linearmente in un radiante parallelo ai Monti di Aspromonte e precisamente lungo la frattura sinclinale corrispondente a quel sollevamento. Il centro poi dell'urto sismico fu verso Gioja Tauro dove l'onda infatti si allargò maggiormente e valicando i monti giunse fino a Catanzaro. I punti estremi della forza del fenomeno che ci sono noti sono Paola al Nord e Messina al Sud. In questo giudizio che risulta dalle poche notizie pervenutemi del fenomeno, era già venuto l'Ingegnere geologo Cortese il quale sta rilevando la carta geologica di quella contrada. Egli nel comunicarmi quella sua giusta idea mi mostrava pure il bello studio col quale ha eziandio assai bene intervista la serie delle fratture che formano la chiave della orografia geologica di quell'estremo lembo d'Italia.

*Massimo d'attività generale italiana dall'*8 *al* 10 *Giugno* 1881.

Mi scrive da Casamicciola il Sig. Ernesto Cesa Maresca ai 12 Giugno 1881: « Io seguito giornalmente a fare i miei studi sulle acque e sulle fuma-

role tanto che debbo darle conto di qualche novità da me osservata mercoldì 8 corrente verso le 7 pom. Tutte le fumarole, e tutte le sorgenti di acqua presso la mia casa erano nello stato normale; ma solo le fumarole, ed il pozzo sorgente dello stabilimento Manzi si trovavano in uno stato assai anormale perchè le prime emanavano una massa di fumo mai visto per quantità, e spessezza di vapore, ed il secondo avea le acque di due gradi di temperatura più calda dell'ordinario. Non so se questo stato di agitazione deve ascriversi a qualche cosa d'irregolare sulla terra, o pure al cambiamento di atmosfera che dopo pochi minuti da tutti noi si osservò; da poi che fummo letteralmente inondati d'acqua dirottissima, ch'è durata per ben tre giorni, e da un ribassamento sensibilissimo di temperatura, che tuttora seguita ».

Dall'illustre Prof. Luigi Palmieri poi in data 9 Giugno:

« Il sismografo al Vesuvio è alquanto più animato di ieri, ma senza scosse sensibili, il che non toglie la possibilità di qualche movimento più risentito alle falde del Vesuvio ».

Da Verona il Prof. Goiran scrive l'11 Giugno:

« Il microsismografo durante la scorsa decade di giugno si è mostrato costantemente agitato lasciando frequenti tracce di leggere scossette ad ore e ad intervalli diversi. Ieri (10 giugno) alle ore 10,15 ant. si ebbe un leggerissimo terremoto ondulatorio segnato da tutti gli strumenti nella direzione approssimativamente OSO-ENE: al telefono suoni e soffi pronunciatissimi mentre il pendolo tromometrico, esaminato col microscopio segnava una marcata trepidazione del suolo. — Dopo quell'ora, calma sino alle 10 ant. d'oggi (11 giugno). Questa mane alle 10,15 ant. si ripetè una leggera scossa ondulatoria, seguita da altre due alle 10,20 e 10,25 ant. sempre nella direzione OSO-ENE. Si ebbe come ieri una marcata trepidazione nel suolo. Alle 11,30 ant. novella scossa ondulatoria ma più leggera. Alle 1 pom tutti gli strumenti sono tranquilli, ed il tromometro segna appena una piccolissima frazione della divisione micrometrica.

Finalmente in data del 10 Giugno medesimo il Prof. Orazio Silvestri scrive da Catania:

« Mi viene comunicato dalla gentilezza del Sig. Comm. Minghelli Vaini, prefetto della provincia, un telegramma che egli ha testè ricevuto dal sottoprefetto di Acireale, il quale telegramma e così concepito: « Forte ma » breve scossa ondulatoria preceduta da rombo a Santa Venerina percor» rendo la stessa linea dei terremoti 1879 ».

« Questo nuovo fatto dimostra la continuazione del periodo sismico cominciato con le rombe e lievi oscillazioni di suolo avvenute a Mineo e le quali (oltre a quelle già annunziate) hanno avuto ripetizione durante tutto il maggio. Sono state specialmente notevoli per la loro intensità le rombe che si sentirono una il dì 14 verso le ore 4 ant.; una il dì 15 alle 10,30 minuti di sera; tre il dì 16 verso le ore 4 ant.; una il dì 22 alle 7 di sera ed un'altra il dì 23 alle 5. ant.

« Frattanto l'eruzione fangosa di Paternò continua attiva; l'intiero bacino della Salinella, che prima era parzialmente occupato dal prodotto idro-argilloso della eruzione, adesso è completamente occupato da un pantano di fango che nuovi danni ha arrecato ai proprietari delle terre vicine.

« Ha intercettato infatti tutti i corsi di acque che vengono dalle abbondanti sorgenti soprastanti e che servivano alla irrigazione; ora tali acque smarrito il corso, si allagano a tramontana del paese ».

Ora riassumendo i dati espostici dai gentili corrispondenti completerò le notizie adducendo altri fatti relativi all' 8 e 9 Giugno. – Veggasi nelle riviste sismiche che si pubblicano nel *Bullettino del Vulcanismo Italiano*, come la data del 7–9 d'ogni mese nell'anno 1881 e del fine dell' antecedente siasi mostrata attivissima per i fenomeni endogeni. Quindi vediamo che cotesto fatto del massimo endogeno nell'8–9 Giugno è al suo posto secondo l' abitudine del tempo che correva. Ma volendo pur fare conoscere a quali altri fenomeni associavasi il rinforzo osservato dal Maresca in Casamicciola ricordo prima di tutto che il sismografo vesuviano si agitò tanto nel giorno 8 da meritarne una speciale mensione per parte del Palmieri che la comunicò ai giornali. All'agitazione sismica del Vesuvio ne corrispose altra notevole in Roma additata anche da gravi rumori microfonici.

Piccole scosse di terremoti avvennero poi in quel giorno a Bologna a M. Fortino d'Ascoli, a M. Cavo ed altrove preludendo alla maggiore attività che il suolo italiano era per manifestare nel dì seguente. Nel giorno 9 i piccoli terremoti s'accrebbero specialmente nel sistema vulcanico Laziale con scossette a Velletri, Palazzuolo, Roma, Ceccano, mentre altrettanto avveniva al Vesuvio ed a Verona. Ma nello stesso giorno 9 il massimo sismico alquanto spaventevole urtò alle ore 0,40 ant. la Svizzera e la Francia limitrofa alla medesima. Insomma come al 4 e 18 Marzo di quest'anno e come al 25 Luglio dell'anno scorso, l'Isola d'Ischia si agitò con fenomeni endogeni contemporanei od almeno aventi relazione con altri simili avvenuti nel cuore delle Alpi.

Dopo aver fornito le notizie ed analizzato i fatti relativi ai principali terremoti avvenuti nell' anno decorso dal Luglio del 1880 al Giugno 1881 sarebbe interessante l' esame della successione dei periodi sismici ai quali essi hanno appartenuto tanto in ordine al tempo ossia alla loro successione quanto in ordine alla topografia ossia alle regioni agitate. Questo studio ho io iniziato nel 1873 ed annualmente l'ho pubblicato tanto in questi nostri atti quanto nel « Bullettino del Vulcanismo italiano ». Come ho accennato nel principio di questa memoria il quadro grafico riassumente in forma statistica i fenomeni del 1880 vide la luce già negli Atti (XXXIV, pag. 482) e quivi si può facilmente studiare l'andamento generale di tutti i periodi sismici. Ma poichè per il 1881 il quadro grafico non fu ancora pubblicato sarà bene far vedere in un quadro riassuntivo le date di tutti i massimi sismici avvenuti nell'anno di cui abbiamo qui analizzato i principali fenomeni (Luglio 1880 — Giugno 1881). Questo quadro è un seguito dei simili spettanti agli anni 1873-1879 pubblicati nel volume II della mia opera *Meteorologia endogena*.

Date dei massimi sismici italiani

1880							1881						
Giorni	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25	26—31	Giorni	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25	26—31
Luglio	4	8	11	16	21	26	Gennaio	5	9	15	19	24	28
Agosto	4	8—9	11—15	»	22	30	Febbraio	2—3	10	14	18—19	22—23	27—28
Settembre	4	8	13	16—18	24	28	Marzo	4	9	11—12	17—19	22—23	27—31
Ottobre	»	8	12	17	24	27—30	Aprile	3	9	12	16	23	27—28
Novembre	4	9	11—12	16	23	28	Maggio	4	9	13	20	23	28—31
Decembre	1—5	8	11	17	23	»	Giugno	3—4	9	13	20	22	28—30

È mirabile in ciascuna cinquina di giorni il ritorno di date identiche e vicine fra loro per i massimi lo che include la regolarità periodica degli intervalli massime decadici e mensili fra i terremoti maggiori. E poichè in questo quadro non stanno separati topograficamente i fenomeni ma vi sono introdotti dall' intiera penisola ne consegue che la legge di periodicità si manifesta per l'intiera Italia senza distinzione di centri diversi d'attività. I medesimi fatti risultarono dai simili quadri antecedenti dal 1873 in poi che sopra ho citato. Questo nuovo anno adunque aggiunse una chiara conferma ai dati già prima svelati.

LE RACCOLTE DI DIATOMEE PELAGICHE DEL CHALLENGER.

Il più che triennale viaggio del Challenger non poteva a meno di riuscire della maggiore utilità per lo stndio delle Diatomee. Raccolte le più svariate per condizione di mari enormemente distanti fra loro, in località o soggette alle influenze terrestri, o da quelle assolutamente immuni, in profondità enormi e sin' a oltre 5000 passi o in bassi fondi; in mari chiusi o aperti, o in estuari di fiumi, o sul passaggio delle correnti, o in stretti o in canali, in mari glaciali o nei tropicali, necessariamente dovettero nella varietà dei tipi dare prova delle grandemente varie influenze su la vegetazione delle Diatomee. Ma le deduzioni incomparabilmonte più interessanti alla biologia delle Diatomee dovevansi precipuamente attendere delle raccolte di quelle fatte per mezzo di piccole reti galleggianti, le quali ci avrebbero rivelato talune forme assolutamente nuove, che così si sarebbero presentate quasi in condizione normale di vita, e non frazionate come si ottengono dagli scandagli e dai depositi. La molteplicità dei risultati ottenuti da quelle raccolte è tale che difficilmente può compendiarsi in breve spazio, quantunque sin ora siasi ben lungi dal credere di averne tratto tutto il partito possibile. Perciò dovremo contentarci per ora di accennare alcuni risultati tratti dallo studio delle Diatomee pelagiche, i quali ritengo che verranno riconosciuti di non lieve importanza all'incremento delle nostre cognizioni su le Diatomee e su la vita del mare.

Fra le molte raccolte fatte a rete galleggiante ricorderemo come più ricche in Diatomee quelle del mare Antartico al Sud dell'isola Heard e altre praticate in prossimità delle barriere dei ghiacci del polo Sud. Straordinariamente ricca di belle forme interessanti fu la pesca di superficie fatta nel mare di Arafura, e quella ottenuta presso le isole Filippine. La flora pelagica di Hongkong già in parte illustrata da Lauder venne pure fruttuosamente esplorata dal Challenger, il quale egualmente raccolse ricca messe di interessanti Diatomee nel mare del Giappone presso Jedo.

Così ricco materiale ottenuto in tanta diversità di luoghi e di tempi, e raccolto semplicemente con schiumare la superficie del mare ci fornì interessantissimi documenti su la biologia delle Diatomee tanto in ordine generale e proprio dei diversi mari, quanto in rapporto alla morfologia di quelle. E prima di tutto dirò come in ordine alla distribuzione geografica

dei diversi tipi il risultato fu quasi nullo, essendo ad ogni momento incontrate forme comuni a mari e luoghi i più disparati. Però nel confronto della flora Diatomacea dei mari glaciali Antartico e Artico si hanno alcune forme generiche e specifiche che *sin ora* si rinvennero a un polo e non all'altro. Ma conosciamo noi abbastanza le due flore da essere autorizzati a trarre simili conclusioni? Bensì si dovette riconoscere generalmente nelle raccolte di superficie l'assenza di alcuni generi di Diatomee da confermare la distinzione fra la flora pelagica e la litoranea. Così mai in tali pesche si vedranno frustuli di *Achnantes*, di *Rabdonema*, di *Grammatophora*, di *Cocconeis*, o di altri generi che come quelli siano o pedunculati o adnati o in qual siasi altra guisa aderenti. Dominano invece in quelle raccolte le molteplici forme di *Coscinodiscus*, genere estremamente raro fra le Diatomee litoranee. Abondano le *Rhizosolenie*, i *Chraetoceros*, i *Bacteriastrum*, ed il nuovo genere *Thalassiotrix*, il quale introdotto dal Ch. Sig. Alberto Grunow ho anche io ammesso, quantunque io lo abbia inteso con un concetto alquanto modificato. Nelle medesime raccolte di superficie è ovvio l'incontrare frustuli spettanti agli *Asteronfalus*, agli *Asterolampra*, agli *Hemiaulus*, alle *Eucampia*, alle *Asterionella*, e a non pochi altri tipi generici e specifici, che sarebbe troppo lungo l'enumerare. Tale recensione parmi più che sufficiente a provare che le surricordate forme imprimono un speciale carattere a quelle raccolte da distinguerle a prima vista da qualunque altra praticata in vicinanza delle terre e su i litorali, ove quelle quasi mai si riscontrano. La distinzione pertanto della flora diatomacea in flora litorale e pelagica rimane perfettamente stabilita, per cui il Geologo dall'esame della formazione marina di un banco di Diatomee in condizione di tripoli potrà venire edotto su le circostanze, nelle quali ebbe luogo quel deposito.

Ma una raccolta di superficie praticata nel mare Antartico presentò una singolarissima anomalia, la quale a prima vista sembrerebbe infirmare quanto veniamo di dire. Tale raccolta fatta al Sud dell' isola Heard, non meno che altra proveniente dalle vicinanze delle barriera continua di ghiaccio del polo Sud della quale ebbi alcune preparazioni fatte a bordo del Challenger, presenta numerosissimi esemplari di *Ceratoneis Arcus*, il quale concordemente da tutti viene riguardato quale forma terrestre e di acqua dolce. Un tale tipo è comunissimo al piede delle Alpi, anzi ne lo direi caratteristico, il quale come costantemente avviene del genere *Eunotia* (cui venne su le prime ascritto da Smith) mai vegeta al livello del mare, essendo in

vece proprio di posizioni a quello superiori di più centinaja di metri. Come pertanto potremo renderci conto di tale singolarissima anomalia? Per quanto si voglia ammettere che Diatomee di acqua dolce possano pure adattarsi ad abitare alcuni mari, le di cui acque meglio che salse siano da riguardarsi come salmastre come pare che avvenga nel Baltico, non potrò però persuadermi sin a prova in contrario che in un mare così sterminato e profondo per quanto meno salato per sua fredda temperatura possa alignare il *Ciratoneis Arcus* che è forma prettamente di acqua dolce e di vegetazione alpina. Una spiegazione però mi viene alla mente, traendola dalle narrazioni degli arditi navigatori, che si spinsero in quei mari desolati. In quelle narrazioni noi leggiamo come le terre, che sorgono nell'emisfero Antartico a limitare i bacini oceanici, sono tutte coronate di sterminati ghiacciai, che con insensibile moto discendono al mare. Il mare nel suo infuriare viene in pari tempo incessantemente minando la roccia su cui posa il ghiacciaio, e corrode il piede di questo, così che mancando di appoggio e rotto ogni equilibrio con immenso fragore distaccansi dal ghiacciajo masse sterminate, che in balia delle onde sono portati alla deriva, finchè convogliati delle correnti in acque più temperate vanno lentamente disciogliendosi.

Queste immense moli di ghiacci galleggianti sono distinte con il nome di *icebergs*, monti di ghiaccio, che nel lento liquefarsi insensibilmeute abassano, cosicchè lo stato superiore sarà l'nltima reliquia dell' iceberg. Se pertanto le condizioni statiche del masso, che si distaccò dal ghiacciaio, si incontrino tali da permettere che una parte esterna di quello rimanesse al disopra dell' istesso nel galleggiare, questo dovrà finire con lasciare alla superficie del mare qualunque organismo, che vissuto all'esterno del ghiacciajo, fu trasportato a lontani paraggi, rimanendo su quelle acque, fra le quali non visse nè potè vivere. Così se alla superficie dell'*iceberg*, prima che questo si dipartiva dal ghiacciajo di cui fece parte, vegetarono Diatomee terrestri e anche di quelle più particolarmente proprie di località notevolmente elevate sul livello del mare, come sono le *Eunotie* e il *Ceratoneis Arcus*, queste in condizione di cellule diatomacee morte poterono finalmeute incontrarsi galleggianti alla superficie dell'oceano Antartico. Per quanto io abbia riflettuto su la più probabile spiegazione di tale anomalia di queste forme raccolte alla superficie del mare, non ho saputo immaginare altra spiegazione, che meglio mi persuadesse: se altri potrà escogitarne alcuna più verosimile sarò ben contento di conoscerla per farne mio prò nello

studio delle Diatomee, rendendomi conto di un fatto apparentemente contraddittorio.

Dai materiali raccolti nel medesimo mare Antartico si ottennero talune forme specìficamente nuove non solo ma altresì genericamente tali, che almeno per ora imprimono alla flora diatomacea Antartica una fisonomia perfettamente distinta dalla flora Artica. Tale differente fisonomia devesi precipuameute al nuovo genere *Dactyliosolen*, il quale presenta molta analogia con il genere *Rhizosolenia*, da cui però si distingue per la totale assenza dal processo terminale caliptriforme. Altra particolarità della flora Antartica è il nuovo genere *Coretron*, il quale è grandemente affine al genere *Bacteriastrum*, ma se ne diparte in più rapporti, ed un tale genere viene rappresentato sotto più forme fra di loro specificamente differenti. Che se l'avere riconosciuto quelle nuove forme mi pose nella necessità di aggiungere altri nomi alla soverchiamente lunga ennmerazione di generi e di specie, ho il piacere di ricordare in pari tempo, che nell'esame intrapreso specialmente delle raccolte pelagiche fatte durante il memorabile viaggio del Challenger ho avuto di tempo in tempo opportuna occasione a riconoscere che talune forme, che sinora vennero considerate come specificamente o anche genericamente distinte, non avevano titolo sufficiente a tale discriminazione. Nè di questo si ha da fare altissima maraviglia, essendo anzi naturalissimo, che chiunque siasi dedicato allo studio di un nuovo ordine di organismi, dia principio dal notare la molteplicità delle nuove forme, che gli si parano innanzi, e notatene le differenze fra l'una e l'altra ne abbia da redigere un elenco, dando a ciascun tipo, che apparve distinto, un nome, che valga a facilitarne la ricordanza. Nell'affacciarsi di nuovo que tali tipi sotto megliori condizioni e con progrediti mezzi di osservazione, non infrequentemente arriverà, che una forma da prima riguardata per nuova venga riconosciuta priva di sufficiente fondamento ad essere data quale forma autonoma.

I frustuli dei diversi tipi di Diatomee, che o in attualità di vegetazione o anche abbandonati dalla vita vengono pescati alla superficie del mare con una rete galleggiante, sono nella migliore condizione per essere sottoposti all'esame del micrografo naturalista. A me avvenne molto frequentemente incontrare nelle collezioni affidatemi di Diatomee di superficie della spedizione Inglese che mi si presentassero numerose diatomee discoidali e specialmente dei *Coscinodiscus* aventi tuttora unite le due valve. In più volte mi venne fatto di notare, che nel continuo e lento elevare ed abbassare

del corpo del Microscopio potevo osservare successivamente le due valve del frustulo, e distintamente ne rimarcavo le scolture. In tale disamina mi venne fatto talvolta rimarcare notevoli differenze fra gli ornamenti dell'una valva e dall'altra, così che se mi fosse arrivato di incontrare le due valve disgiunte necessariamente avrei dovuto ritenerle appartenenti a due specie distinte. La novità della osservazione naturalmente richiamò tutta la mia attenzione, così che confermata la cosa e posta fuori di ogni dubbio, appuntai la preparazione e ne feci sotto i miei occhi trarre i disegni per mezzo della camera lucida, e le figure rappresentate con le due corrispondenti valve vedonsi alla Tav. II, fig. 1 e 2, e Tav. 13 fig. 9 della Relazione su le Diatomee raccolte nel viaggio del Challenger.

Tali osservazioni con ogni diligenza accertate dimostrano come le determinazioni fatte su scandagli o su depositi debbano essere accettate con qualche riserva, a meno che la particolarità notata non venga confermata dal numero degli esemplari, che ne vadano distinti.

Però se l'esame delle Diatomee pelagiche ci portò alla necessità di aumentare la nomenclatura costituendo ancora taluni nuovi generi, contemporaneamente porse occasione di cancellarne alcuni, che prima erano ricevuti. Brigtwell nell' introdurre i generi *Goniothecium*, *Dicladia* non ommise di esternare il dubbio, che questi fossero realmente organismi autonomi. È molto comune l'osservare nelle pesche di Diatomee pelagiche deì filamenti o serie di *Chetoceros*, dei quali ogni frustulo rachiude un *Goniothecium*, cosichè questo va considerato come frustulo sporangiale del medesimo *Chetoceros*. Per analogia sarebbesi potuto venire alla medesima conclusione in riguardo al *Syndendrium*, al quale il Ch. Professore H. L. Smith aveva già riunito il *Goniothecium*. Quello però che non so intendere come l'illustre Micrografo Americano, quando a mio modo di vedere con ottimo accorgimento credette riunire i generi *Syndendrium* e *Goniothecium*, non abbia in pari tempo riconosciuto in questi stessi un organo di riproduzione dei *Chetoceros*, essendo ovvio d' incotrare i *Goniothecium* inclusi nei frustuli di quello, come venne più volte figurato: la quale inclusione essendo stata da me incontrata ancora per la *Dicladia* se ne deduce, che quelle tre forme che vennero riguardate quali generi autonomi, vanno considerate soltanto come sporangi o organi di riproduzione dei *Chetoceros*.

Le molte raccolte pelagiche del Challenger, che mi vennero affidate per esaminarle mi presentarono opportunità di altra osservazione la quale mi convinse sin all'evidenza che i due tipi, i quali vennero riguardati come due

generi distinti, non sono invece che le due diverse valve del medesimo frustulo, come avviene nei generi *Cocconeis*, *Achnanthes* ed altri. Ma qui confesso trovarmi in un serio inbarazzo. Trattasi dei due generi, *Euodia* istituito da Bailey nel 1859, ed *Hemidiscus* stabilito da Wallich nel 1860. Questi generi vengono riportati da Pritchard, il Quale riferitene le due definizioni, e notato come per i due generi si tratti di forme a valve lunate e granulate con la sola differenziazione della presenza di nodulo ventrale marginale negli *Hemidiscus*, emette il dubbio che realmente trattisi di un solo genere, essendo forse sfuggito alla attenzione di Bailey il nodulo ventrale. Se consulto la Sinopsi del Prof. H. L. Smith (1) vedo fatta memoria di tre distinti generi *Hemidiscus*, *Palmeria* e *Euodia*, intorno cui confesso non sapere per ora riconoscere motivo sufficiente a distinguere li due generi *Palmeria* e *Hemidiscus* se questo si dovesse intendere con la definizione di Wallich, mentre nella *Palmeria* ritrovo i caratteri richiesti da quella. Invece al genere *Hemidiscus* il Prof. Smith affisse nel 1872 altro significato includendovi se non erro taluna forma, che già fu detta *Euodia*, mentre da altri si ascriveva al genere *Triceratium*. In tale inbroglio sperai che mi si facesse un poco di luce ricorrendo alla = Synopsis des Diatomees de Belgique = del Dott. Enrico Van Heurck, come questo lavoro è fatto secondo la classificazione dello Smith. Dovetti però notare in questa d'altronde interessante opera, (utilissima per la buona rappresentazione delle forme diverse), che vi si fa menzione unicamente del genere *Euodia*, al quale ascrive due o tre forme diverse, che dubbitarei che siano rettamente determinate, fra le quali la prima detta *Eu. Weissflogii*. parmi doversi escludere dal genere per essere tutt'altro che angulifera. Ed ecco un piccolo saggio della confusione babelica, che spesso si presenta allo studioso, ponendo a cimento la sua pazienza. Ma lasciando per ora a parte la distinzione da ammettere o da escludere fra i tipi *Euodia* e *Palmeria*, ricorderò il fortunato incontro fatto in una delle tante raccolte da me esaminate, nella quale vedevansi più frustuli uniti in serie, che mi fecero chiaramente distinguere le loro valve lunate alternamente fornite di nodolo marginale o prive di quello. Per tal modo dovetti convincermi che il Professore Bailey non erasi male apposto nel dire che il tipo da Lui

(1) Nel vedere che il ch. Smith pone fra i sinonimi dell'*Euodia*. Bailey, l'*Hemidiscus*, Wallich, ho il piacere di intendere che anche Esso è della mia opinione su la necessità di riunire le due forme: però non mi consta se per Lui i motivi a tale riunione siano quelli stessi che qui espongo.

esaminato e descritto fosse privo di nodulo marginale, che il ch. Dott. Waldich notò nell' *Hemidiscus cuneiformis*, mentre però le due forme non erano altro che le due valve del medesimo frustulo il quale perciò costituisce un solo tipo generico. Così ho veduto finalmente verificarsi quanto io stesso presentii sin dal 1871 ed accennai nell' « Esame microscopico e note critiche su un campione di fango Atlantico ottenuto nella spedizione del « Porcupine » nell'anno 1869 = (vedansi gli Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, Anno XXIV, Sess. 1ª). Dovendosi pertanto riunire i due generi in un solo, questo secondo le regole stabilite dovrà per ragione di priorità dirsi *Euodia*, che da Bailey fu stabilito nel 1859, mentre il genere *Hemidiscus* fù dal suo Antore pubblicato nel 1860.

Altro non meno interessante risultato dello studio diligente delle raccolte di superficie riportate dalla spedizione del Challenger fu quello che mi avvenne di fare in materiali provenienti specialmente dall'Atlantico settentrionale. Da tempo erasi notato dai Diatomologi in preparazioni di taluni depositi marini e di scandagli di mare profondo come non sia affatto raro il rinvenirci frammenti abbastanza grandi di Diatomee finissimamente punteggiati e piani, che danno a conoscere evidentemente avere appartenuto a forme di inusitata grandezza, ma insieme di estrema tenuità. Nel maggior numero forse degli scandagli da me esaminati incontrai simili frammenti, come trovo notato nel mio giornale delle osservazioni, senza però che mi venisse fatto di incontrare un solo esemplare in condizione di sufficiente integrità da poterne determinare i caratteri generici e specifici confrontandoli con le apparenze di quei frammenti. Nelle punteggiature di quelli potevansi riconoscere speciali differenze, da doverli riguardare come appartenenti a tipi singolarmente distinti. Tutto questo forse per lungo tempo ancora sarebbe restato allo stato di enigma, se non mi fossero state comunicate alcune preparazioni, che opportunamente erano state montate al primo momento sul bastimento, quando venivano ritirati i retini galleggianti. Una di queste preparazioni racchiudeva soltanto due esemplari di una Diatomea cilindroide di tale grandezza inusitata da potersi perfettamente scorgere ad occhio nudo. In alcune altre preparazioni insieme a molti esemplari di crostacei microscopici, di radiolarie e di Diatomee potei incontrare qualche altro frustulo di inusitata grandezza. Però la dimensione e la convessità di quei frustuli era impedimento a poterli esaminare con obiettivi di molto breve foco, quale era richiesto a distinguere la minutezza del dettaglio. Dopo lungo provare e riprovare finalmente ottenni di distinguere nella linea del fru-

stulo cilindrico tangente al coprioggetto la minutissima granulazione del lato zonale del frustulo, che credetti ascrivere al nuovo genere *Etmodiscus* la di cui finissima granulazione era identica a quella dei sovraccennati frammenti riscontrati.

La verificazione di un tal punto mi giunse singolarmente opportuno, mentre poco prima ottenevo saggi di una formazione di Diatomee appartenenti al mioceno inferiore recentemente scoperta dal Professore Pantanelli nell'Appennino Modenese e nel Reggiano, le di cui preparazioni vedonsi gremite di frammenti di pareti silicee di Diatomee piane e finissimamente punteggiate. Contemporaneamente dal ch. Professore Seguenza mi veniva gentilmente spedito un poco di scisti a Diatomee della Provincia di Messina, fra i quali alcuni potevansi dire esclusivamente formati da simili frammenti a punteggiature diverse per finezza e ordine, che dimostravano come forme di straordinaria grandezza e tenuità appartenenti a tipi differenti dovettero trovarsi in infinito numero agglomerate da formare con i loro resti quasi da sole un considerevole strato scistoso. Nella relazione da me redatta delle Diatomee riportate dalla spedizione del Challenger, sotto il nuovo genere *Etmodiscus* ho descritto e figurato fra le diverse specie alcune di enorme grandezza cioè l'*Etm. gigas* dalle Isole di Capo Verde del diametro di 1633μ, « l'*Etm. Wivilleanus*, pure dell'Atlantico » e del diametro di 1000μ, l'*Etm. Tympanum*, dal mare del Giappone, e l'*Etm. spheroidalis,* dal Pacifico, per la di cui determinazione generica però conservo qualche dubbio, vedendone i frustuli binatamente congiunti da un comune cingolo, ciò che mi farebbe sospettare, che valga meglio riguardarlo come *Melosira*. L'enorme agglomeramento di queste Diatomee che diedero origine a quello scisto è argomento a supporle di generi nei quali i frustuli sono uniti in serie o catene, come avviene precisamente dal genere *Melosira* e di più altri.

Dal sin qui narrato o meglio semplicemente accennato dei risultati ottenuti con l'esame delle raccolte di Diatomee pelagiche avute durante il viaggio del Challenger sembrami essere ad evidenza provato quanto la scienza siasi avvantaggiata sotto il rapporto di questi singolarmente maravigliosi organismi non meno che in quanto appartiene ad ogni altro ramo della Storia Naturale. Quella spedizione rimarrà sempre memoranda, e sarà sempre un titolo di gloria per l'Inglese Governo, e la collezione dei risultati scientifici di quella, che con splendidezza di tipi e ricchezza di illustrazioni viene pubblicata, dovrà essere precipuamente consultata da chiunque nell'avvenire vorrà attendere

allo studio della Talassografia e della vita del mare. Che se l'Inghilterra porta il vanto su tutte le Nazioni nell'avere con tanta splendidezza impiegato i suoi immensi mezzi a prò della Scienza, gli altri Governi hanno con quella gareggiato nel nobile intento. Gli Stati Uniti di America, l'Austria, la Germania, la Francia, la Svezia, la Danimarca con maggiori o minori mezzi hanno in questi ultimi anni contribuito con spedizioni di navi appositamente armate ed equipaggiate all'avanzamento delle nostre cognizioni sul mare. È quindi da ritenere che la nostra Italia, la quale tanto enormi sacrifici si impose per far rispettare ovunque la propria bandiera, non vorrà rinunziare alla gloria di avere anche Essa cooperato ad accrescere il comune patrimonio della Scienza anche nella Talassografia, scienza così giovane e pure tanto promettente.

F. Castracane

NB. Questa Nota fu presentata nella Sess. VIa del 16 Maggio 1886.

LE DIATOMEE FOSSILI DI GABI

NOTA

DEL DOTT. MATTEO LANZI (1)

Allorchè nell'anno 1881 pubblicai una mia nota sulle Diatomee fossili ritrovate fra le ghiaje sottostanti ai tufi lungo la strada di Tor di Quinto, esternava un mio sentimento, quello cioè che altre diatomee fossili potessero esistere nel suolo di Roma, e fondava tali mie vedute sul fatto della esistenza in esso di fossili marini e fluviali, già da altri rinvenuti nelle diverse giaciture appartenenti alla valle del Tevere. Perseverando nelle mie ricerche, pregando amici che attendono assiduamente a studi botanici e geologici, affinchè mi fornissero materiali da loro raccolti; se la scoperta delle Diatomee marine nel suolo di Roma rimane tuttora un desiderio, che spero un giorno possa avverarsi nella sua realtà; sono tuttavia in grado di potere ora presentare alcuni risultati dei miei studi sulle Diatomee fossili di acqua dolce esistenti nel terreno quaternario ed in luoghi diversi di questa provincia, sebbene ritenga che, in altri ancora ed altre specie di Diatomee possano venire scoperte in seguito.

Oggi dirò delle Diatomee fossili rimaste finora ignote e rinvenute nel luogo, ove altra volta esisteva il Lago di Gabi o Castiglione, lago prosciugato da circa cinquanta anni dal Sig. De Antonis, onde ridurlo a coltivazione. E debbo all'ottimo amico Dott. Guglielmo Terrigi l'avermene riportato due saggi e le relative notizie in seguito ad una escursione colà eseguita per i suoi studi geologici. Il primo, che tuttora occupa il fondo del bacino di detto lago è di colore grigio-nerastro, superiore e superficiale, dello spessore di venti centimetri o poco più, ne rappresenta il fango ancora fornito di sostanza carboniosa. L'altro a questo sottostante, di colore biancastro, di una potenza conosciuta di oltre due metri, quale in alcuni punti potrebbe essere anche maggiore, è più ricco in diatomee del precedente misto a calcare finissimo, quasi del tutto scevre da relitti di materia organica o carboniosa, le quali mostrano una ulteriore riduzione allo stato fossile. Vi abbondano le *Cyclotella*, vi si trovano pure in prevalenza le *Fragilaria*, le *Cymbella*; sono in quantità minore alcune *Navicula*, *Ma-*

(1) Presentata nella Sess. IV del Marzo 1886.

stogloja, *Epithemia*, *Denticula*, scarse le *Nitzschia*, le *Amphora*, le *Cimatopleura*. Vi si vedono pure unite spicule di spongiarii anch'essi di acqua dolce.

Ho creduto opportuno rendere palesi i risultati di questo mio studio, finora non eseguito da altri, di determinare cioè le specie proprie a questo materiale, nutrendo la speranza che possa valere in qualsia modo a servire di guida nel dare una giusta interpretazione di ciò che avvenne in epoche più lontane, ogni qualvolta ci imbattiamo a prendere in esame materiali affini a questo, ponendoli a riscontro con tale trasformazione di diatomee allo stato fossile, le quali con serie non interrotta di ripetute moltiplicazioni continuarono la vita fino a noi.

ELENCO DELLE SPECIE

Melosira crenulata Ktz. var. italica Grun.
Cyclotella operculata Ktz.
— compta Ktz. var. paucipunctata Grun.
— — var. oligactis Grun.
Surirella ovata Ktz.
Campylodiscus costatus W. Sm.
Cymatopleura ellyptica Ktz.
Epithemia ocellata Ktz.
— sorex Ktz.
— argus Ktz.
— zebra W. Sm.
— — var. proboscidea Grun.
— turgida Ktz.
— gibba Ktz.
Eunotia minor Rabenh. (E. pectinalis var.? Van Heurck).
Nitzschia sigmoidea W. Sm.
— amphioxys W. Sm.
— thermalis var. intermedia Grun.
— — var. minor. Grun.
— palea (Ktz.) W. Sm.
Fragilaria capucina Desmaz. var. acuminata Grun.
— brevistriata Grun. var. subacuta Grun.
— — var. pusilla Grun.
Denticula tenuis Ktz.

Synedra ulna Ehrn. var. splendens Rabenh.
— — var. longissima Van Heurck.
Cocconeis placentula Ehrn.
Rhoicosphenia curvata Grun.
Gomphonema dichotomum W. Sm.
— intricatum Ktz.
— constrictum Ehrn. var. subcapitatum Grun.
Amphora ovalis Ktz.
— — forma parva Grun.
— pediculus Ktz. var. minor Grun.
Cymbella affinis Ktz:
— subaequalis Grun.
— (Cocconema) cymbiformis Ehrn.
— (Cocconema) lanceolata (Ehrn.)
Navicula (Pinnularia) major Ktz.
— (Pinnularia) oblonga Ktz.
— (Pinnularia) Brebissonii Ktz.
— (Pinnularia) viridis var. commutata Grun.
— radiosa Ktz.
— iridis var. firma Grun. (N. firma Ktz.)
— laevissima Grun.
— ellyptica Ktz.
— — var. minutissima Grun.
— sculpta Ehrn. (N. tumens W. Sm.)
— subcapitata Gregory.
— limosa Ktz.
— — var. giberula (Ktz.) Grun.
— fontinalis Grun.
— (Colletonema Thw.) vulgaris Brun.
Mastogloja Densei Thw.
— Smithii Thw.
— — var. amphicephala Grun.

COMUNICAZIONI

Boncompagni, D. B. – *Presentazione di pubblicazioni.*

D. B. Boncompagni presenta 1.° da parte della R. Accademia delle Scienze di Torino un esemplare diretto con cartellino stampato: « All'Accademia » Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma A. M. Piazza Colonna Palazzo del Prin- » cipe di Piombino » del fascicolo intitolato: « ATTI || DELLA || R. ACCADEMIA DELLE » SCIENZE || DI TORINO || PUBBLICATI || DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI || » VOL. XXI. DISP. 1ª (Novembre–Dicembre 1885) || TORINO ecc. » — 2.° da parte del sig. prof. G. Luvini un esemplare da lui indirizzato nella 1ª pagina all'accademia stessa di una tiratura a parte intitolata: « Estratto dalla RIVISTA » SCIENTIFICO-INDUSTRIALE 1885, n.° 18–19 || SULLA RIFRAZIONE ATMOSFERICA LATERALE || » BRANO DI LETTERA || *del Dottore* G. ANDRIES *al Professore* G. LUVINI », in–8.° di 4 pagine nella 4ª delle quali lin. 27–29 si legge: « Prof. Giovanni » Luvini || Torino via Carlo Alberto. 36. || Torino, Stamperia dell'Unione Tip. » Editrice ».

Presenta anche 1° un esemplare del fascicolo intitolato: « ANNO I MARZO- » APRILE 1886 || FASCICOLO II. || PERIODICO || DI || MATEMATICA || PER || L'INSEGNAMENTO » SECONDARIO || DIRETTO || DA || DAVIDE BESSO ecc. || ROMA ecc. || 1886. » — 2.° un esemplare del fascicolo intitolato: « SOCIETA' METEOROLOGICA ITALIANA || BOL- » LETTINO DECADICO || PUBBLICATO PER CURA || DELL'OSSERVATORIO CENTRALE || DEL || » REAL COLLEGIO CARLO ALBERTO || IN MONCALIERI || Anno XIV || 1884–85. — Gen- » naio–Maggio 1885 ». — 3.° un esemplare del fascicolo intitolato: « SOCIETA' » METEOROLOGICA ITALIANA || BOLLETTINO MENSUALE || PUBBLICATO PER CURA || DEL- » L'OSSERVATORIO CENTRALE || DEL REAL COLLEGIO CARLO ALBERTO IN MONCALIERI » Serie II. Vol. V. *Gennaio–Settembre* 1885. » — 4.° un esemplare del fascicolo intitolato: « Jahrbuch || über die || Fortschritte der Mathematik || » begründet || von || Carl Ohrtmann. || Im Verein mit anderen Mathema- » tikern || und unter besonderer Mitwirkung der Herren || Felix Müller und » Albert Wangerin || herausgegeben || von || Max Henoch und Emil Lampe. || » Funfzehuter Band. || Jahrgang 1883. || (In 3 Heften Berlin 1885 ». — 5.° un esemplare di ciascuno dei fascicoli seguenti: « BULLETTINO || DI || BIBLIOGRAFIA » E DI STORIA || DELLE || SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE || PUBBLICATO || DA B. BON- » COMPAGNI || TOMO XVI. || INDICE DEGLI ARTICOLI E DEI NOMI || ROMA ecc. 1883. » BULLETTINO || DI || BIBLIOGRAFIA ecc. TOMO XVIII. MAGGIO 1885. TOMO XVIII. » GIUGNO 1885 ».

Lais P. G. — *Presentazione di pubblicazioni.*

Il Vice-segretario presentò da parte del socio corrispondente Rev. S. J. Perry le seguenti note a stampa: 1. « *The solar surface in* 1885 ». 2. « *Preliminary Results of a Comparison of certain simultaneous Fluctuations of the Declination at Tew and at Stonyhurst during the Years* 1883 *and* 1884, *as recorded by the Magnetographs at these Observatories*: » e da parte del socio corrispondente sig. E. Catalan i seguenti opuscoli: 1. « *Sur quelques intégrales définies* ». 2. « *Sur les fonctions Xn, de Legendre* (troisième mémoire) ». 3. « *Sur un développement de l'intégral elliptique de première espèce, et sur une suite de nombres entiers* ».

Castracane, Conte Ab. F. — *Sulla moltiplicità delle forme, che osservansi fra le Diatomee di acqua dolce e più fra le marine*:

Il Sig. Conte Ab. F. Castracane intrattenne l'Accademia su la moltiplicità delle forme, che osservansi fra le Diatomee di acqua dolce e più fra le marine; cosicchè chiunque imprenda a determinare il genere e la specie, cui appartenga ogni Diatomea, che va esaminando nel campo del microscopio, trovasi esitante nella identificazione con i tipi conosciuti, e non rare volte gli avviene di persuadersi di avere presente una nuova forma autonoma. Quando il dubbio organismo venga riconosciuto in una raccolta fresca e vivente, il vedere un tale tipo rappresentato da un grande numero di esemplari, renderà meno arduo l'accertarsi che abbiasi da fare con una nuova forma normale specifica, o almeno con una nuova varietà, di specie cognita. Ma il più spesso accade il vedere forme nuove o almeno grandemente dubbie, quando si intraprende l'esame di depositi geologici o di scandagli; cosicchè non vi sia da contare con moltiplicità di simili esemplari. Perciò le osservazioni, che vengono fatte in simili casi, avranno sempre una importanza molto minore di quelle che siano fatte su raccolte vive. Se però si riconoscano in scandagli o in depositi forme nuove e singolari, saranno quelle da trascurarsi? No certamente; mentre se nel momento la mancanza di confronti ne renda molto dubbia la determinazione, potrà venire il momento, che si incontri il medesimo tipo in altre circostanze e località; cosicchè dal constatare la costanza delle forme vengasi a generare la convinzione, che quella novità non costituisce una struttura fortuita o anormale, ma abbia ogni diritto ad essere riguardata quale nuova forma tipica.

Da simile considerazione risulta come sia utile alla scienza il conservare la memoria di tali singolari organismi: e questa non solo con disegnarne la forma, ma ancora ricordandoli con nome generico specifico. Nè mancano più distinti esempi di simili pubblicazioni; ma sopra tutti insigne fu quella fatta dal distinto micrografo inglese Greville, troppo presto rapito alla scienza il quale nel *Quaterly Journal of Microscopical science* incominciando dal 1861, sotto il titolo di *Description of the new and rares Diatomes*, pubblicò venti serie di singolarissime forme da esso perfettamente disegnate. Simile lavoro intendesi intraprendere dal Disserente per fare conoscere le moltissime nuove Diatomee da lui raccolte nel non breve tempo, da che dedicossi a simile studio, molte delle quali ritrasse con la fotografia, fra le quali più di una venne fatta conoscere da altri. Così senza astringersi a lavori monografici, che sono lunghi e tediosi, si potrà di tempo in tempo fare conoscere talune descrizioni e figure di Diatomee nuove o rare, o per qualsiasi altra ragione interessanti; cosicchè il titolo di tale pubblicazione sarà quello di *Documenti per servire alla storia delle Diatomee*.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Soci Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente - D. B. Boncompagni - P. F. S. Provenzali - Cav. A. Statuti - Prof. F. Ladelci - Prof. G. Tuccimei - Cav. F. Guidi - P. G. Lais, Vice-segretario.

Corrispondenti: Mons. B. Grassi-Landi.

Aggiunti: March. L. Fonti.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* — Vol. XXI, disp. 1. Torino 1885. In 8°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIII, 1885—86. Serie IV, Rendiconti. Vol. II. Fasc. 5, 7. — Roma, 1886. In-4°
3. *Atti del R. Istituto d' Incoraggiamento alle scienze naturali, ecc.*, 3ª Serie, Vol. IV. — Napoli, 1885, in-4.°

4. *Bullettin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou.* — A. 1884. — n.° 1. — Moscou, 1885. In-8.°
5. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma.* — A.° XI. — n. 8. — Roma, 1885. In 8.°
6. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.* — T. XVI, — Indici. — Roma, 1883. In-4.°
7. CATALAN (E.) — *Sur quelques intégrales définies.* — Bruxelles, 1885, In-4.°
8. —— *Sur les fonctions* Xn, *de Legendre* (*troisième mémoire*). — Bruxelles, 1885, in-4.°
9. —— *Sur un développement de l'intégrale ellyptique de première espèce et sur une suite de nombres entiers.* — Bruxelles, 1885, in-4°
10. *Crónica cientifica.* — A. IX. — n. 197. — Barcelona, 1886, in-8.°
11. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, etc.*, — Jahr. 1883, Heft 2. — Berlin, 1886, in-8.°
12. *Il Bibliofilo.* — A. VII, n° 3. — Bologna, 1886, in 8.°
13. *Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas.* — Vol. V. — Coimbra, 1884, in-8.°
14. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVIII, n.° 1, 2. S.t Pétersbourg 1885. In-8.°
15. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosesto. — Serie XII, Vol. XI, quad. 846. — Vol. XII, quad. 851. — Firenze, 1885, in-8.°
16. LUVINI (J.) — *La question des tourbillons atmosphériques, note présentée par M. Faye.*
17. —— *Über die Ursache der atmosphärischen elektricität.*
18. PERRY (S. J.) — *The solar surface in* 1885.
19. —— *Preliminary Results of a Comparison of certain simultaneous Fluctuactions of the Declination at Kew and at Stonyhurst during* 1883 *and* 1884.
20. *Rivista italiana di scienze naturali e loro applicazioni.* — A. I. — fasc. IV. — Napoli, 1885, in-8.°

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VI^a DEL 16 MAGGIO 1886

PRESIDENZA DEL SIG. CONTE AB. FRANCESCO CASTRACANE DEGLI ANTELMINELLI

MEMORIE E NOTE

DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

ESAME DI UN NUOVO DOCUMENTO METEOROLOGICO DEL SECOLO XVII IN ORDINE ALLE IDROMETEORE BRESCIANE

NOTA

DEL P. GIUSEPPE LAIS

Nella sessione terza del 21 Febbrajo 1886 davo comunicazione all'Accademia di un diario meteorologico del secolo decimo settimo redatto in Brescia ed appartenente alla famiglia Averoldi, e mi proponeva di ritornare sull'interessante soggetto traendovi i valori meteorologici delle idrometeore bresciane. La serie delle osservazioni fornisce un materiale di 30 anni consecutivi che è tanto più importante, quanto più remoto, perchè iniziato nell'anno 1687. Per dare un saggio del modo primitivo con il quale fu redatto il giornale, basterà riferire quanto leggesi nel Luglio 1693 – 1. Mercoledì « Quasi tutta notte piogetta alle undici rinforzatasi ed è seguitata sino alle 18 dopo qualche poco di sole. Fresco. » – 2. Giovedì « sole sino le 20, indi tocco di campane, alle 23 spruzzo di acqua, all'Ave nuovi tuoni e folgori: tutt'oggi freddo. » – 3. Venerdì « Tutta quanta la notte sino alle ore sette pioggia gagliarda con vento, e sino alle ore tre folgori, tuoni e campane. La mattina sempre nuvolo con brevi spruzzi di acqua: dopo pranzo sempre sole ».

Fa maraviglia la costanza con la quale l'Averoldi per trenta anni giorno

per giorno senza veruna interruzione ci ha dato conto dello stato del cielo per quanto poteva farsi a quel tempo in mancanza di strumenti e di metodi. Quali vantaggi non avrebbe potuto attendere la scienza, se un uomo di tanta costanza avesse potuto avere a sua disposizione metodi e mezzi attualmente adoperati? So anche di altre osservazioni dell'Ateneo di Brescia, che ha posseduto un abile osservatore meteorologo nella persona del sig. Perego, che tre volte il dì per anni 28 continui, cioè dal 1818 al 1846, eseguì ben ordinate osservazioni. Ma non potendo io occuparmi delle più recenti, mi limito alle antiche raccolte dal diario dell'Averoldi, e mi fermo sopra 3026 osservazioni di pioggia, 364 osservazioni di temporali, 295 precipitazioni nevose, 408 nebbie, e un mezzo centinajo di osservazioni sulle grandini.

Le osservazioni meteoriche che riguardano la frequenza delle piogge e delle nevi ci danno il carattere della distribuzione delle precipitazioni per quella regione a piè delle alpi, tanto varia dal nostro clima marittimo. Ordinando tutte le osservazioni per anni e per mesi ne risulta una statistica, che si compendia nel 1° quadro in calce alla presente memoria eseguito sopra tre mila osservazioni. Questo documento, che ha grande raffronto con le osservazioni dell'epoca attuale, ci dimostra, che in Brescia i mesi più piovosi dell'anno sono: il Maggio, l'Aprile, e l'Ottobre, con una prevalenza del Maggio di 13, 36 precipitazioni di pioggia. Per noi è invece il Novembre, che supera gli altri e raggiunge per medio 12.71, venendo immediatamente dopo i mesi di Dicembre e Gennajo. Una cosa però degna di osservazione per il nostro paese è, che la ripartizione mensile dei giorni piovosi sembra soggetta a variazioni significanti; perchè ove si faccia il confronto tra gli elementi più recenti del Campidoglio e quelli più antichi del Collegio Romano (confronto da me eseguito nel lavoro *Atlante Meteorico* ossia *riassunto grafico generale delle variazioni atmosferiche del clima di Roma* alla tavola XIV) si vede l'accrescimento che va prendendo l'Aprile ed il Maggio. Per mille più recenti osservazioni del Campidoglio compete ad Aprile la cifra di 15,8 precipitazioni, e al Maggio di 14,1, mentre per novemila osservazioni di data più antica del Collegio Romano competono 10,5 all'Aprile e 9,5 al Maggio. Questo fatto tende ad avvicinare la nostra primavera a quella che si ha a piedi delle Alpi, il che può avvenire e per frequenza maggiore di temporali o per maggiore comunanza di burrasche.

I trenta anni di osservazione esaminati in ordine alla statistica delle nevi cadute danno un medio mensile di giorni nevosi, quale può vedersi nel secondo specchio, con un massimo in Gennajo di 3.53 di un minimo in Ot-

tobre di 0,03. E qui non posso dispensarmi dell'osservare la proporzione tra le pioggie e le nevi nella stagione invernale, e trovo, che facendo un elenco degli anni, nei quali in uno dei mesi invernali Dicembre Gennajo e Febbrajo la pioggia o la neve superò il valore medio mensile, sopra cinquanta confronti quarantadue risultarono tali, che se fuvvi abbondanza di giorni nevosi, i piovosi furono in deficienza e viceversa, e s soltanto non si corrisposero; sicchè si ha l'84 per % di probabilità che ad un anno piovoso corrisponda un anno scarso di neve, e 16 per % che accada uguale proporzione. Ciò deve corrispondere al fatto, che le precipitazioni tanto solide quanto liquide hanno un quantitativo corrispondente al vapor d'acqua che si conserva nell'atmosfera, e che si deposita di anno in anno variando gli aspetti che esso prende in dipendenza della temperatura.

Il quadro da me ricavato giova a protrarre le osservazioni di relazione che si possono fare tra le precipitazioni delle nevi e il progresso dei ghiacciai in epoche più remote del 1812.

I temporali del clima bresciano sono dedotti dal guizzo dei lampi e delle folgori, e del fragore del tuono spesso accusato nel diario di osservazione.

Il massimo dei temporali cade in Italia nella estiva stagione, ma non in maniera, che si abbia per tutto la coincidenza del massimo di questi fenomeni nello stesso mese: per Brescia il massimo cade nel mese di Giugno e Luglio; la media annua è di 12 temporali.

Circa le grandini cadute nei trent'anni di osservazione, l'inverno n'è affatto privo: rarissime ne presenta l'autunno: la primavera e l'estate ne contano presso a poco ugual numero: la media annua è di tre grandini.

La ripartizione mensile del novero del periodo è quella indicata dal seguente specchietto.

Gennaio	0	Aprile	12	Luglio	10	Ottobre	2
Febbraio	0	Maggio	11	Agosto	9	Novembre	1
Marzo	11	Giugno	10	Settembre	6	Dicembre	0

Le nebbie hanno il loro massimo nella stagione invernale, ed il mese che primeggia è il Dicembre con una media mensile di 4.8, mentre per noi è l'Agosto con una media di 4.2. La frequenza annuale è di 13.4.

I freddi poi intensi registrati nel giornale dell'Averoldi sono: quelli del Gennajo 1709, in cui si ebbe agghiacciamento della laguna di Venezia, della riviera di Genova, e la Brenta divenne tutta un cristallo da passeggiarvi

sopra. Non dissimile da questo fu l'anno 1716 ed il 1711, in cui leggesi che in Brescia come 1709 agghiacciò il puro vino.

Sette furono i cicloni o tifoni che estirparono alberi, crollarono muri e produssero gravissimi danni (1), e 10 terremoti scossero il suolo bresciano, dei quali quattro nel secolo decimo settimo e sei del decimo ottavo (1).

Il giornale enumera anche casi di fulminazione di uomini ed animali, e così descrive la comparsa di un bolide scoppiato il 28 Marzo 1711. Leggesi in data del 29. « Ieri sera circa le due e mezzo fu veduto da molti un grande splendore calare in aria, indi un rumore come di uno sparo di artiglieria o caduta di una bomba, e tremarono i vetri delle finestre. Fu una meteora accesa in aria e si ruppe e crepò con tanto fracasso. »

La morte dell'Averoldi troncò il filo di queste interessanti notizie, che potranno essere raccolte ove già non lo fossero nelle schede dell'archivio geodinamico, in cui si registrano fatti tellurici di grande importanza.

---

(1) 2 Aprile 1690. Ciclone o tifone con danni di tetti scoperti, camini e muragliecadute.

Nelle feste di Pentecoste del 1691 tempesta sul cremasco con morte di animali e tetti rotti.

28 Luglio 1691. Il vento di jeri ha gettato a terra arbori e scoperto case.

26 Novembre 1698. Al lago d'Iseo il vento la notte passata ha fatto danni gravissimi gettando a terra muri e fondamenti.

28 Luglio 1699. Temporale spaventoso, perchè vento impetuoso da cui estirpati arbori.

7 Luglio 1700. La tempesta del 6 ovunque è caduta ha levato quasi tutto, ha rotto i coppi, ed il vento ha spiantato arbori.

16 Luglio 1713. Oggi alle ore 20 furiosissimo vento da cui arbori spiantati, tetti scoperti, frutti a terra, tuoni orribili e poi pioggia a diluvio per un ora e più.

(2) 20 Aprile 1702. A ore 13 e mezza circa una bona scossa di terremoto si è fatta sentire, altri molti dicono averne sentite chi due, chi tre.

20 Gennajo 1703. Oggi alle ore 20 e mezza circa una leggiera scossa di terremoto, dicono molti, ma io non l'ho sentita.

27 Luglio 1703. Questa notte a ore quasi sei piccola scossa di terremoto sentita da molti non solo in città ma nel territorio.

22 Agosto 1714. Questa notte dopo le cinque breve scossa di terremoto da molti e molti sentita, da me nò.

La notte venendo li 27 di questo mese (Ottobre 1706) piccola scossa di terremoto, diede molta apprensione, io non la udii, ma altri in casa e molti e molti in Brescia l'hanno sentita.

27 Maggio 1708. A ore otto circa (cattivo principio in questi giorni) una scossa di terremoto ha posto in tumulto gli animi, nulla di danno ha recato.

27 Maggio 1709. Alle sei questa notte piccola scossa di terremoto, io non l'ho sentita, molti però l'attestano.

5 Novembre 1691. Lunedì a ore 5 e mezza una piccola scossa di terremoto.

25 Febbrajo 1695. Venerdì. Questa mattina alle 12 e tre quarti una bona scossa di terremoto. Dio ci liberi.

29 Novembre 1699. Alle ore sette circa dicono abbia il terremoto fatto una scossa ma breve e fugitiva; solo pochi l'hanno sentita; la maggior parte non ha udito nulla.

GIORNI PIOVOSI

Anni	G.	F.	M.	A.	M.	G.	L.	A.	S.	O.	N.	D.	S.
1687	2	2	1	8	7	4	8	7	8	7	9	4	67
1688	7	1	11	11	9	15	8	13	7	7	10	8	107
1689	2	2	4	16	13	17	10	11	8	17	7	1	108
1690	4	6	10	8	16	16	14	11	7	11	9	4	116
1691	1	5	7	4	11	11	17	4	12	2	8	10	92
1692	3	12	10	14	15	8	10	9	8	15	10	2	116
1693	5	3	9	18	19	14	21	4	10	2	10	4	119
1694	0	0	9	7	19	13	8	3	8	10	12	7	96
1695	0	4	9	5	22	19	7	8	5	12	0	7	98
1696	0	10	13	15	9	9	4	3	7	7	7	9	93
1697	9	7	7	20	12	12	15	8	3	10	6	2	111
1698	2	5	4	17	19	11	7	11	14	11	11	5	117
1699	5	1	4	19	16	9	10	9	6	9	7	6	101
1700	0	6	8	13	12	12	6	6	6	12	8	5	94
1701	2	10	14	17	11	10	12	4	0	10	7	3	100
1702	9	4	2	10	14	15	10	8	3	13	7	13	108
1703	7	11	5	8	14	11	6	9	8	9	8	0	96
1704	3	6	14	9	13	8	9	2	6	1	11	7	89
1705	2	2	13	7	8	15	9	4	8	13	14	10	105
1706	7	5	1	6	11	7	5	3	10	9	17	7	88
1707	2	1	7	7	15	4	10	6	9	17	1	4	83
1708	19	14	11	15	7	23	4	2	7	9	4	6	121
1709	1	4	12	10	13	8	7	9	11	9	4	8	96
1710	0	5	5	13	10	10	10	10	3	12	8	5	91
1711	0	3	9	17	14	13	7	14	10	10	9	9	115
1712	4	4	6	9	18	12	8	7	8	13	8	11	108
1713	7	3	13	16	14	13	11	9	8	10	8	0	112
1714	2	1	1	7	17	11	15	8	15	16	4	4	101
1715	1	3	9	5	11	10	13	7	6	7	7	5	84
1716	6	10	4	1	12	7	4	6	19	11	10	4	94
Somma	112	150	232	332	401	347	285	215	240	301	241	170	3026
Medio Mensile	3.73	5.00	7,73	11.06	13.36	11.56	9.50	7.17	8.00	10.03	8.00	5.66	8.42

GIORNI NEVOSI

Mesi	1687	1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697	1698	1699	1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708	1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715	1716	Somma	Media Mens.
Gennaio	2	4	4	1	3	2	1	1	8	2	1	10	1	1	2	0	4	6	1	0	6	0	14	4	2	5	3	3	7	8	106	3·53
Febbraio	0	0	0	0	3	6	0	1	8	0	6	9	0	4	2	0	0	0	7	2	0	1	7	1	4	1	1	0	4	0	67	2·23
Marzo	0	2	1	0	0	5	1	0	0	1	1	2	2	1	0	0	1	1	0	0	1	0	2	0	2	5	0	1	1	2	32	1·06
Aprile	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	3	9	0·30
Ottobre	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0·03
Novembre	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	1	2	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	12	0·40
Decembre	0	9	1	2	1	2	0	7	4	4	1	1	3	5	1	1	1	2	1	1	6	2	3	0	0	2	2	0	3	4	68	2·30
Somma	3	17	6	3	7	15	2	9	20	7	11	23	6	13	6	3	6	9	9	3	17	3	27	5	8	13	7	5	15	17	295	1·40

TUONI E LAMPI TEMPORALESCHI

Mesi	1687	1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697	1698	1699	1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708	1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715	1716	Somma	Media Mens.
Marzo	4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1	1	4	0	0	0	1	0	1	0	17	0·57
Aprile	1	0	1	3	1	1	2	1	0	0	1	2	0	0	0	0	2	1	0	0	1	6	4	1	1	3	2	0	2	0	36	1·20
Maggio	3	2	2	3	2	1	1	3	5	2	2	1	2	1	2	2	1	0	2	0	1	2	2	1	0	5	1	1	4	2	56	1·86
Giugno	3	0	2	6	1	4	2	2	2	0	1	2	1	4	2	0	3	2	1	3	1	2	1	1	2	2	1	5	2	3	60	2·00
Luglio	1	0	3	3	7	4	4	2	3	2	2	0	7	4	2	5	1	5	2	2	0	2	0	2	1	1	8	7	4	0	84	2·80
Agosto	2	0	1	1	3	1	4	1	2	0	1	3	2	2	0	0	2	0	2	2	0	2	4	0	7	5	2	0	3	1	53	1·77
Settembre	2	1	1	0	1	0	0	2	2	0	0	2	0	1	3	1	2	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	25	0·83
Ottobre	0	1	1	2	0	0	0	0	0	1	0	2	2	3	0	1	1	0	1	1	2	0	0	2	0	2	1	0	0	0	23	0·77
Novembre	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	6	0·20
Dicembre	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0·13
Somma	16	4	11	18	16	11	13	12	14	6	7	12	14	15	13	9	12	10	12	9	6	16	15	7	12	19	16	15	17	7	364	1·01

NEBBIE

Mesi	1687	1688	1689	1690	1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697	1698	1699	1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708	1709	1710	1711	1712	1713	1714	1715	1716	Somma	Media Mens.
Gennaio	1	2	0	8	0	3	1	0	0	2	2	5	2	1	6	3	2	0	5	2	1	1	3	3	2	1	3	3	2	0	64	2·13
Febbraio	0	0	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	1	2	0	0	0	2	0	2	1	0	1	0	0	0	2	5	12	40	1·33
Marzo	0	0	0	0	1	2	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0·27
Aprile	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0·13
Maggio	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0·00
Giugno	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5	0·17
Luglio	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	6	0·20
Agosto	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0·00
Settembre	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0·13
Ottobre	0	0	0	5	0	1	0	2	1	1	1	1	0	0	2	1	5	0	2	1	0	0	2	2	0	1	1	1	0	0	30	1·00
Novembre	1	0	16	6	8	2	2	1	5	0	3	1	1	1	3	1	2	8	2	5	2	4	3	0	6	5	2	0	2	6	98	3·27
Dicembre	4	0	3	7	3	7	4	1	1	3	8	0	7	4	8	1	6	6	[illegible]	5	4	10	4	15	3	3	3	9	2	9	145	4·83
Somma	7	3	19	28	14	19	7	5	10	10	17	8	12	8	22	7	17	16	16	14	9	17	13	22	11	10	9	15	11	29	405	1·12

LE DIATOMEE FOSSILI DELLA CAVA PRESSO S. AGNESE IN VIA NOMENTANA

NOTA

DEL DOTT. MATTEO LANZI

In Via Nomentana nelle vicinanze della Chiesa di S.ta Agnese e di un vecchio rudere, designato volgarmente col nome di Sedia del Diavolo, esiste una cava di tufo. Debbo essere grato all'Illustre Prof.re Romolo Meli, il quale con somma gentilezza mi offrì un saggio di materiale appartenente ad uno dei giacimenti recentemente venuti in luce mediante il taglio di tale cava, affinchè determinassi le specie di diatomee, che vi fossero conteunte. È questo di colore biancastro, composto da calcare amorfo, da fina sabbia silicea, da diatomee, e da spicule di spongiari, aggregate e mescolate insieme. Dallo studio fattone, dopo averlo trattato col metodo solito ad usarsi, onde sceverare le diatomee dal calcare, dalla sabbia e dalle spicule, mi apparve essere uno dei più ricchi rispetto alla diversità delle specie, fra quelli propri al terreno quaternario del suolo di Roma finora conosciuti; in quanto che ve ne potei contare più di cinquanta, comprese alcune varietà di esse. Per numero di frustuli vi soprabbondano le *Epithemia*, le *Cymbella*, la *Cocconeis placentula*, la *Melosira varians*; e rispetto alla diversità e moltiplicità di specie prevalgono le *Navicula*, le *Nitzschia* e le *Synedra*, come si scorge dal qui unito elenco. Tutte però sono di quelle, che ora vediamo vivere nelle acque dolci, come tali pure sono le spicule di Spongiari, che vi stanno unite: e tale motivo induce ad ammettere che, in quel luogo ed in epoca a noi remota abbia esistito una raccolta di acqua di siffatta qualità.

ELENCO DELLE SPECIE

Melosira varians Agard.
— — var. dentroteres Grun.
Cyclotella meneghiniana Chauvin var. rectangulata Grun.

Surirella splendida Ktz.
— ovalis de Breb.
— — var. minuta Van Heurck.
Cymatopleura ellyptica Ktz.
— solea de Breb.
Epithemia zebra var. proboscidea Grun.
— sorex Ktz.
— gibba Ktz.
— — var. ventricosa Grun.
Nitzschia frustulum Ktz.
— — var. tenella Grun.
— — var. inconspicua Grun.
— Brebissonii W. Sm.
— debilis Grun.
— hungarica Grun.
— amphioxys W. Sm.
Synedra ulna Ehrn.
— — var. longissima Van Heurck.
— — var. subaequalis Grun.
— — var. spathulifera Grun.
— — var. splendens Rabenh.
Cocconeis placentula Ehrn.
Rhoicosphenia curvata W. Sm.
Gomphonema constrictum Ehrn.
— dichotomum W. Sm.
— subclavatum Ktz.
— acuminatum Ehrn. var. coronatum Van Heurck.
Cymbella affinis Ktz.
— (Cocconema) cistula Hempr.
— (Encyonema) ventricosa Ktz.
Navicula (Pinnularia) major Ktz.
— (Pinn.) viridis Ktz.
— (Pinn.) -- var. commutata Grun.
— (Pinn.) peregrina Ktz.
— iridis Ehrn.
— radiosa Ktz.
— — var. acuta Grun.

Navicula ellyptica Ktz.
— limosa Ktz.
— — var. subinflata Grun.
— — var. giberula Grun.
— obtusa W. Sm.
— cuspidata Ktz.
— ambigua Ktz.
— bicapitata Lagerst.
— amphisbaena Bory.
— rhyncocephala Ktz.
— laevissima Ktz.
— amphirhyncus Ehrn.
— (Colletonema) neglecta Brun.
Stauroneis phoenicenteron Ehrn.

COMUNICAZIONI

Tuccimei, Prof. G. – *Presentazione di un suo opuscolo*:

Il ch. Prof. G. Tuccimei presentò un suo lavoro a stampa intitolato: « Considerazioni sopra il *Karst-Phänomen* dei monti sabini.

De Rossi, Prof. M. S. – *Presentazione di un opuscolo del socio corrispondente Prof. D. Ragona*:

Il Segretario presentò da parte del Prof. D. Ragona una nota a stampa intitolata: « Sul periodo diurno della evaporazione.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Soci Ordinari: Conte Ab. F. Castracane, Presidente. – Cav. F. Guidi. – Dott. M. Lanzi – P. G. Lais. – P. G. Foglini. – Comm. C. Descemet. – Ing. A. Statuti. – Cav. G. Olivieri. – Prof. G. Tuccimei – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

Corrispondenti: Mons. B. Grassi-Landi.

La seduta apertasi legalmente alle ore 5 $\frac{1}{2}$ p. venne chiusa alle ore 7 $\frac{1}{2}$.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Annuario dell'Istituto cartografico italiano* (*L. Rolla*). — Anno 2° — Roma, 1886, in-8.°
2. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. — A. CCLXXXIII, 1885—86. Serie IV, Rendiconti. Vol. II. Fasc. 11, 12. — Roma, 1886. In-4°
3. *Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti*. — T. IV. — Serie VI. — disp. 2, 4, 5. Venezia, 1885—86, in-8°
4. *Bullettino della R. Accademia medica di Roma*. — A. XII. — fasc. 3. — Roma, 1886. In 8°
5. *Catalogue of Canadian Plants*. — Part II. — Gamopetalae. — Montreal, 1884, in-8°
6. *Commission géologique du Canada*. — *Rapport des opérations* 1882—83—84. (Traduction).
7. —— *Mappes, etc. accompagnant le rapport des opérations* 1882—83—84.
8. *Crónica científica*. — A. IX. — n. 203—205. — Barcelona, 1886, in-8.°

9. *Journal de la société physico-chimique russe.* — T. XVIII, n.° 4, S.t Pétersbourg 1886. In-8.°

10. *La Civiltà Cattolica.* — Anno trigesimosettimo. — Serie XIII, Vol. I, quad. 857—860, Firenze, 1886, in-8.°

11. *Memorias de la Real Academia de ciencias de Barcelona.* — T. II, N. 1. (Segunda Época). Barcelona, 1885, in-4.°

12. MORANDOTTI (E.) — *Manuale ragionato del laboratorio di precisione.* — Roma, 1886, in-8.°

13. *Post-Graduate Cours of Lectures*, 1881—82, 1882—83, 1883—84, 1884—85, 1885—86. — St. Louis, Mo. 1886, in-8°.

14. RAGONA (Prof. D.) — *Sul periodo diurno della evaporazione.* — Modena, 1886, in-8°.

15. *Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.* — A. XXV, fasc. 1, 2, 3. — Napoli, 1886, in-4.°

16. *Rivista di artiglieria e genio.* — (Maggio). Vol. II. — Roma, 1886, in-8.°

17. *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.* — Vol. IV. (N. S.) — Part 7—9. Vol. V. Part. 2. — Dublin, 1886. In-8.°

18. *The scientific Transactions of the Royal Dublin Society.* Vol. III. (Serie II). VII—X. — Dublin, 1885. In-4.°

19. TUCCIMEI (Prof. G). — *Considerazioni sopra il* « Karst-Phänomen » *dei monti Sabini.* — Roma, 1886, in-8°.

ATTI
DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE'NUOVI LINCEI

SESSIONE VII^a DEL 20 GIUGNO 1886
PRESIDENZA DEL PROF. CAV. MATTIA AZZARELLI

MEMORIE E NOTE
DEI SOCI ORDINARI E DEI CORRISPONDENTI

APPARECCHIO SEMPLICISSIMO PER COMPRIMERE L' ARIA.
MEMORIA
DELL' ING. CAV. FILIPPO GUIDI

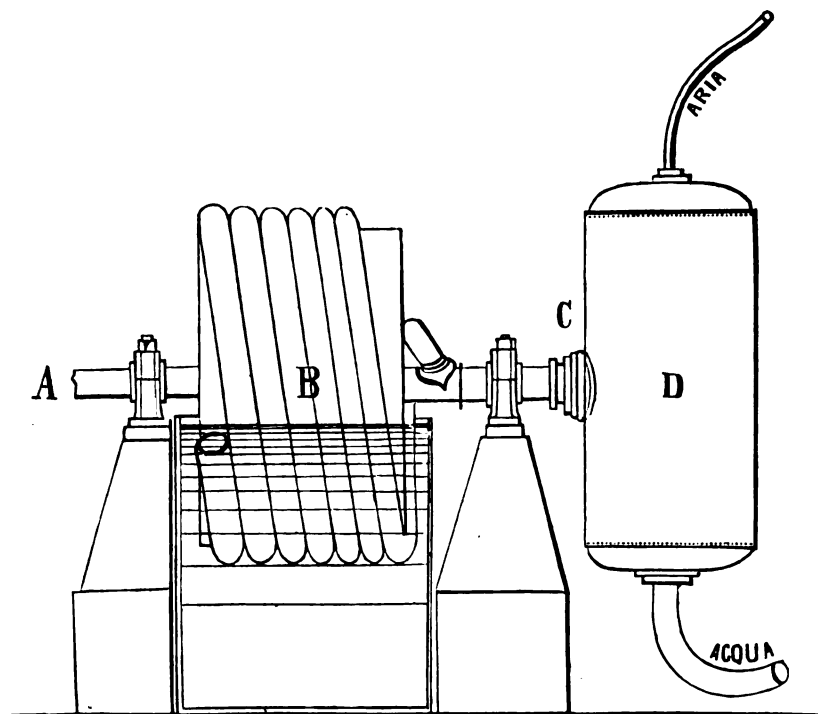
Più d'una volta ebbi già l'onore d'intrattenere l'Accademia sul profitto da potersi ricavare dalle forze idrauliche a mezzo dei tanti sistemi ora conosciuti ed adoperati pel trasporto a distanza di tale energìa meccanica: oggi mi permetto ritornare sullo stesso argomento, proponendo un meccanismo per la compressione dell' aria.

Innanzi tutto credo utile far osservare come la ricchezza inesauribile di forze idrauliche esistente in Italia sia utilizzata in minima parte, mentre cavandone maggior profitto supplirebbe tanto bene alla mancanza o almeno estrema scarsezza dei combustibili fossili, scarsezza che purtroppo è causa di grave passività nei scambi internazionali. La ragione più forte di tale trascuranza io credo trovarla precipuamente nelle difficoltà che s'incontrano in prattica per ottenere una regolare trasmissione a distanza della energia meccanica prodotta dai nostri innumerevoli corsi d' acqua, e dalla spesa non lieve che occorre per tali trasmissioni. Voglio quindi far rimarcare che in moltissimi casi non si fa quel conto che si dovrebbe fare della grande ricchezza che arrecano le forzeidrauliche, spaventati essendo gl'industriali dal costo, dalla complicazione e dalla manutenzione dei meccanismi di trasmissione. E perciò mi sembra chiaro che nelle nostre condizioni poco (per non dir nulla) dovrebbe interessare lo studio del massimo rendimento di un mezzo qualunque di trasmissione, ma invece il vero vantaggio si avrebbe nel trovare un modo il più semplice, il più economico, e quindi il più facile ed alla

portata di tutti per usufruire sì delle grandi che delle piccole forze idrauliche a forti distanze dal balzo che le produce: e tale scopo vò dimostrare che possa ottenersi con l'aria compressa meglio che con qualunque altro sistema conosciuto, cioè con funi, con acqua compressa e con energìa elettrica.

Nello scorso anno io proponeva un mezzo di semplificare di molto il meccanismo recettore dell' aria compressa, servendosi dell' acqua come intermediario nella azione dell' aria compressa sul recettore stesso, e dimostrai che un dato volume d'acqua senza disperdimento se non che minimo può con turno regolarissimo animare un recettore idraulico dei più comuni e conosciuti, ricevendo la forza d' azione sopra tal recettore dall' aria compressa invece che da una prevalenza di livello. Tale disposizione elimina le gravi difficoltà che tutti conoscono esistere nella conduzione di un recettore d'aria compressa, macchina complicata che richiede non piccola spesa di costruzione e meccanici molto abili per condurle senza inconvenienti.

La stessa semplicità e la stessa economìa di costruzione e di conduzione si otterrebbe nell'apparecchio che ora sono a proporre come compressore dell'aria.

In Francia più che da noi è conosciuto ed adoperato un' apparecchio di semplicità unica per sollevare acqua, chiamato *Pompe Spirale*, composto appunto da più spire di un semplice tubo immerso entro l'acqua da sollevarsi, all'incirca sino all'asse dell'elica : questo apparecchio fu immaginato dall'olandese Wetman nel 1746.

A asse posto in azione da un recettore idraulico. — B spirale ove si comprime l'aria.
C premistoppa. — D recipiente ove si divide l'acqua dall' aria.

Dalla figura si comprende assai facilmente l'ufficio che presta l'apparecchio allorchè sia fatto ruotare in guisa che la bocca del tubo–elica prenda l'acqua di fronte. Nella semirivoluzione che fa questa bocca sotto l' acqua, beve di questa, nell' altra semirivoluzione lascia entrare aria; sicchè nel movimento tutte le spire si trovano riempite a metà d' acqua nella parte inferiore ed a metà d'aria nella parte superiore. Ma questa disposizione è subito cambiata allorchè dall' altro capo dell' elica, che si ripiega verso il centro ed entra nell'asse (che pure fa da prolungamento del tubo), l'acqua e l' aria n' escono per entrare in un tubo ascendente a mezzo di un premi–stoppa, e cioè quando l' acqua sollevata al disopra del livello del recipiente, forma una colonna che comprime l'aria (naturalmente a diverso grado) nelle varie spire dell' elica, pressione che viene equilibrata con lo spostamento dell' acqua in tutte le parti inferiori delle spire, di guisa che la colonna saliente equivale alla somma delle colonne formate dalle parti di spire piene d' acqua.

Di questo apparecchio fa menzione con molto interesse il celebre Morin nel pregievolissimo suo trattato *Des machines et appareils destinés à l'élévation des eaux*: cita l'esperienze da lui fatte sopra un modello esistente nel conservatorio d'arti e mestieri, dalle quali risulta che si ottiene da questo apparecchio il rendimento del 64 per cento allorchè sia fatto ruotare con velocità conveniente.

Ora se in questo apparecchio si prenda in mira come scopo principale la compressione dell' aria, e quindi si unisca un recipiente cilindrico col suo asse verticale come vedesi nella figura, alla fine dell' elica in luogo del semplice tubo verticale ove defluirebbe l'aria mista all' acqua, si avrà la divisione perfetta dell' acqua dall' aria, ed è chiaro che senza valvole e senza verun meccanismo complicato si avrà da questo apparecchio una regolare produzione d'aria compressa condotta da un tubo, e contemporaneamente il sollevamento di pari massa d' acqua condotta da altro tubo ad altezza corrispondente a tante volte metri 10,33 per quante atmosfere denotino la compressione ottenuta nell' aria: e questa acqua sollevata o potrà essere utile a seconda delle esigenze delle varie industrie o potrà impiegarsi nuovamente per ottenere energìa meccanica. In altri termini oltre alla compressione di un dato volume d'aria si avrà un eguale volume d' acqua che potrà prendersi dall'alto della colonna saliente ovvero, mantenuta costantemente piena tale colonna, si darebbe l' uscita all'acqua in un punto più basso che si possa facendola agire sopra un recettore idraulico. Basterà un rigonfiamento in capo al tubo saliente ove possa collocarsi un galleggiante per ottenere da questo un regolatore automatico, a fine che tanta acqua entri dall' elica e tanta n'esca per agire sul recettore idraulico.

Il Morin raccomanda pel miglior rendimento di questo apparecchio, che il movimento di esso non sia troppo lento, e ne dà giustamente la ragione

dicendo che la forza viva impiegata per comprimere l'acqua si utilizza in parte nell' elatere dell' aria stessa quando esce insieme all' acqua nel tubo saliente; peraltro dalle esperienze citate dianzi risulta che non è poi grande la differenza di rendimento a diverse velocità di ruotazione: deduco da questo che lo stesso apparecchio darà un effetto stupendo come compressore d'aria poichè senza valvole, senza perdita di moti alternativi, senza attriti se non minimi; e la perdita del 36 ed anche del 40 per cento si avrà soltanto per la metà del lavorio dell' apparecchio, cioè per la elevazione dell'acqua.

Finalmente farò osservare che comprimendosi l'aria entro le spire dell'elica di mano in mano che dalla prima passa alla seconda, e quindi alla terza e via via, dovrà farsi il tubo con diametro costantemente diminuito dalla bocca al premistoppa di uscita; ma questo compenso mentre è buon rimedio al volume decrescente dell'aria, apporta un disturbo nel moto dell' acqua, poichè la metà delle spire non bastano più a contenere l acqua introdotta ad ogni semirivoluzione dell' apparecchio. Se dunque si vorranno ottenere forti compressioni d'aria si dovrà ricorrere ad un espediente abbastanza semplice, cioè si farà uscire l'acqua e l'aria in un recipiente cilindrico con l'asse orizzontale e non verticale com'è indicato nella figura, e questo recipiente abbastanza grande perchè dentro di esso possa collocarsi un' altra elica da lavorare come lavora la prima ad aria libera: ed è chiaro che così l'aria introdotta nell'apparecchio ad un tal grado di compressione riceverebbe nella stessa guisa la compressione ulteriore. Insomma l'apparecchio che propongo sarà sempre di estrema semplicità ed alla portata di tutti.

COMUNICAZIONI

Tuccimei, Prof. G. – *Sulle cavità naturali dei monti Sabini*:

Il prof. G. Tuccimei tornando sopra la sua recente publicazione relativa al fenomeno delle cavità naturali dei monti Sabini, cita l'opinione dell'illustre prof. T. Taramelli, che il noto passo di Virgilio debbasi attribuire alla valle di Frigento nelle Puglie. Ritiene che tanto per l'autorità del geologo di Pavia, quanto per le validissime ragioni arrecate, ci sia ben poco dubbio ad ammettere siffatta opinione. Alla quale egli non esita sottoscriversi, tanto più perchè nella citata publicazione non fece che riportare opinioni di archeologi ed eruditi, senza associarsi ad alcuna di esse, e citando in testa alla memoria il passo di Virgilio, unicamente per l'uso che già ne aveano fatto i detti archeologi ed eruditi, e per l'associazione d'idee che ne nasceva parlando delle cavità Sabine, alle quali quel passo si era voluto riferire.

Ferrari, P. G. S. – *Sulla luce crepuscolare rossa*:

Il Ch. P. G. Stanislao Ferrari richiamò l'attenzione dei colleghi circa il fenomeno da esso osservato sul tramonto del sole nei giorni 26 e 27 Maggio decorso e specialmente nei giorni 3, 5 e 6 del corrente Giugno. Si ripeterono cioè in modo assai sensibile, sebbene in proporzioni più modeste, i celebri crepuscoli rossi osservati nel 1883 e 1884, intorno ai quali ed alla loro origine sono tuttora divisi i pareri degli scienziati. Fino a tanto che non si verrà a ben stabilire la loro natura giova raccogliere tanto per l'una parte, quanto per l'altra, dei sempre nuovi documenti.

Egli è perciò che nel caso presente non conviene dimenticare come l'apparizione di questo fenomeno crepuscolare rosso ha seguìto di pochi giorni l'eruzione dell'Etna del 17 Maggio e giorni seguenti, e però parrebbe venire in appoggio della sentenza di coloro, che attribuiscono, oltre al vapor d'acqua, per la massima parte lo splendore di questi crepuscoli alla presenza e sospensione di polveri tenuissime, che vengono lanciate a grandi altezze dai vulcani nelle loro eruzioni, e poscia trasportate dai venti nelle varie regioni. È bene intanto se non altro il prenderne atto.

A quest'osservazione del P. Ferrari il Ch. Prof. M. S. de Rossi aggiunse che in questi giorni altresì era in grande eruzione il Taravera vulcano della Nuova Zelanda.

De Rossi, Prof. M. S. – *Intorno alla eruzione etnea del Maggio*:

Il Prof. M. S. De Rossi ragionò intorno ai fenomeni ed alle osserva-

zioni sui medesimi raccolte in Italia durante il periodo della eruzione etnea, deducendone la sempre più evidente connessione e solidarietà dell'andamento geodinamico generale italiano col parossismo eruttivo dell'Etna. Volse quindi il ragionamento sulle future applicazioni pratiche degli studi geodinamici; e notò che fra le altre utilità già da lui stesso esposte in altra circostanza, potrebbesi ricavarne i dati per l'impianto d'un sistema speciale d'assicurazione dei terreni e dei fabbricati dei luoghi soggetti ai disastri geodinamici. Mostrò con alcune cifre comparative come la superficie danneggiata e minacciata dalla odierna eruzione sia stata minima in confronto anche della sola regione etnea. Considerando poi e dimostrando la somma fertilità dei terreni soggetti alle azioni geodinamiche, la quale può essere considerata crescente in ragione diretta col pericolo proveniente dai massimi straordinari di quelle azioni, ne inferì potersi quei terreni assoggettare ad una tassa minima speciale, che non sarebbe punto per essi gravosa, e che potrebbe costituire un fondo d'assicurazione unico in tutto il regno, contro i danni geodinamici. Aggiunse in fine essersi dal Governo Pontificio già ideato ed applicato qualche cosa di simile in tempi meno opportuni per tali operazioni finanziarie. Allorchè nel 1859 Norcia fu rovinata dal terremoto, il governo dopo risarciti i danni costituì un fondo da tenere a moltiplico e che denominò *del terremoto*. Questo fondo non dovea in altro essere impiegato che a risarcire i danni che potessero rinnovarsi in Norcia per il terremoto. Possa questo cenno e questa idea esser presa in considerazione da chi potrebbe darle corpo e vita a vantaggio e sollievo dei popoli talvolta oppressi da quelle stesse forze della natura, le quali nella loro ordinaria azione costituiscono un beneficio ed una ricchezza superiore alle altre contrade.

De Rossi Prof. M. S. – *Presentazioni di opuscoli di soci*:

Il Segretario presentò per parte del professor D. Ragona due note a stampa: 1.ª « *Sul periodo diurno della evaporazione* »; 2.ª « *Sul regime dei venti in Zocca nella provincia di Modena* »; e da parte del prof. Ab. L. Cerebotani un opuscolo intitolato « *La tachimetria senza stadia* ».

COMITATO SEGRETO

Venne approvata la proposta di cambio tra i nostri Atti e le pubblicazioni della Commissione geologica del Canadà e della R. Accademia delle scienze di Barcellona.

SOCI PRESENTI A QUESTA SESSIONE

Soci Ordinari: Prof. M. Azzarelli. – Prof. G. Tuccimei. – Prof. V. De Rossi Re. – Cav. F. Guidi. – P. F. S. Provenzali. – P. G. S. Ferrari. – P. G. Lais. – Prof. F. Ladelci. – Cav. A. Statuti. – Prof. M. S. De Rossi, Segretario.

La seduta apertasi legalmente alle ore 6 p. venne chiusa alle ore 8 pom.

OPERE VENUTE IN DONO

1. *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften.* München 1885. In-4.°
2. *Annuario della R. Università di Pisa per l'anno accademico* 1885—86. Pisa, 1886, in-8.°
3. *Archives du Musée Teyler.* — Série II, Vol. II. — 2ème, 3me Parties. — Haarlem, 1885. In-8.°
4. *Atti della R. Accademia dei Lincei.* — A. CCLXXXIII, 1885—86, — Serie IV. — Rendiconti, Vol. II. — Fasc. 9. Roma, 1886. In-4°
5. —— Memorie, Vol. II. Roma, 1886, in 4.°
6. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* Vol. XXI, disp. 2ª, 3. Torino (s. a.) in-8°
7. BERTI (T.) — *La Villa di Orazio.* Roma, 1886, in-8.°
8. *Boletin de la Academia nacional de ciencias en Córdoba.* T. VIII, Entrega 2ª y 3.ª — Buenos Aires, 1885, in-8.°
9. *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de S.t-Pétersbourg.* T. XXX, — n.° 2. — 1885, in-4.°
10. CEREBOTANI (L.) — *La Tachimetria senza stadia.* — Verona 1886, in-8° piccolo.
11. *Crónica científica.* — A. IX. N. 201, 202. — Barcelona, 1886. In-8.°
12. *Fondation Teyler.* — *Catalogue de la Bibliothèque.* — 1ère et 2me livraison — Haarlem, 1885. In-4.°
13. *Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jah.* 38. Wiesbaden, 1885. In-8.°
14. *Journal de la société physico chimique russe.* — T. XVII. — n.° 3, — St. Pétersbourg, 1886, in-8°
15. *La Civiltà Cattolica.* A. XXXVII, Vol. II, quad. 861—864. Firenze, 1886, in-8°.
16. *Mémoires de l'Académie de Stanislas* 1884. — Nancy, 1885. In-8.
17. *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.* — IIe Série, T. XI. — Bruxelles, 1885, in-8.°
18. *Notarisia.* — *Commentarium phycologicum.* — A. I, n. 2. — Venezia, 1886, in-8°.
19. *Publications of the Cincinnati Observatory.* — 8 — *Observations of Comets,* 1883 — Cincinnati, 1885. In-8.°
20. RAGONA (D.) — *Sul regime dei venti in Zocca.* — Torino, 1886, in 4°.
21. *R. Comitato Geologico d'Italia,* 1886. — Bollettino n. 1 e 2. Roma, 1886. In-8°
22. *Rivista di Artiglieria e Genio.* — Aprile 1886. — Vol. II. — Roma, 1886. in 8.°

INDICE DELLE MATERIE
DEL VOLUME XXXIX
(1885-1886)

Pag.

MEMORIE E NOTE

COMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI DEL SEGRETARIO

COMITATO SEGRETO